ВВЕДЕНИЕ
В СУПЕРГРАВИТАЦИЮ

ВВЕДЕНИЕ
В СУПЕРГРАВИТАЦИЮ

SUPERGRAVITY'81

Proceedings of the Ist School on Supergravity held on22 April - 6 May, 1981, at the International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy

Edited by S. FERRARA and J.G. TAYLOR

Cambridge University Press

Cambridge London New York New Rochelle Melbourne Sydney

1982

ВВЕДЕНИЕ
В СУПЕРГРАВИТАЦИЮ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ С.ФЕРРАРЫ, Дж.ТЕЙЛОРА

Перевод с английского
д-ра физ.-мат. наук Д.В. Гальцова и
канд. физ.-мат. наук А.А. Цейтлина
под редакцией д-ров физ.-мат. наук
Д.В. ГАЛЬЦОВА и Р.Э. КАЛЛОШ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА «МИР» 1985

ББК 22.31
В24
УДК 533.9.01

Дж. Стретди, Дж. Тейлор, М. Грисару, П. ван Ньювенхейзен, М. Дафф, Б. Де Вит, Э. Креммер

Введение в супергравитацию: Пер. с англ./Под ред. С. Феррары,
В24 Дж. Тейлора. – М.: Мир, 1985. – 304 с., ил.

Книга представляет собой первое систематическое изложение на русском языке основных идей и методов суперсимметрии и супергравитации. Содержит лекции семи ведущих специалистов в этой области — известных учёных Великобритании, Италии, Нидерландов, США и Франции. В книге после краткого введения в суперсимметрию обсуждаются построение расширенных супералгебр, техника расширенных супергравитационных теорий в пространствах с дополнительными размерностями, проблема ультрафиолетовых расходимостей, скрытые симметрии в расширенных супергравитационных моделях и т.д.

Книга может служить учебным пособием для лиц, впервые знакомящихся с этим актуальным направлением в квантовой теории поля.

$$\text{В}\,\frac{1704070000-172}{041(01)-85}\;76-85,\ \text{ч. }1$$

ББК 22.31
53

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теория супергравитации была предложена в 1976 г. Фридманом, Ньювенхейзеном и Феррарой [1], а также Дезером и Зумино [2]. Эта теория представляет собой локальное (зависящее от координат пространства) обобщение открытой ранее Гольфандом и Лихтманом [3], Акуловым и Волковым [4], Вессом и Зумино [5] глобальной суперсимметрии – симметрии между бозонами и фермионами. Главная особенность супергравитации – это то обстоятельство, что два преобразования локальной суперсимметрии ведут к общековариантному преобразованию, т.е. теория супергравитации представляет собой "корень квадратный из общей теории относительности" в той же мере, в какой уравнение Дирака есть корень квадратный из уравнения Клейна – Гордона.

С момента своего появления теория супергравитации вызвала огромный интерес и всплеск активности (в отличие от глобальной суперсимметрии, которая с момента ее открытия в 1971 г. ждала своих активных исследователей до 1974 г.), причем эта активность продолжается и усиливается вплоть до настоящего времени, фокусируя в разные годы в центре внимания различные аспекты теории. Уже к 1980 г. имелось примерно 600 различных статей по супергравитации. Это привело к тому, что в 1981 г. в Международном центре теоретической физики в Триесте (Италия) была организована 1-я Международная школа по супергравитации, за которой последовало рабочее совещание по суперсимметрии и супергравитации. На школе читались лекции по уже устоявшимся результатам, а на совещании докладывались новейшие работы. Школы по суперсимметрии и супергравитации с последующими рабочими совещаниями превратились в традиционные. Такие школы состоялись также в 1982, 1983 и 1984 гг.

С целью дать общее представление о предмете в данную книгу были включены лишь лекции вводного характера, прочитанные на школе "Супергравитация 81" ведущими специалистами по суперсимметрии и супергравитации; ряд важных, но технически более сложных лекций не вошел в состав сборника. Сюда относятся лекции Феррары и Савоя о представлениях расширенной суперсимметрии на одно- и двухчастичных состояниях. В лекциях Веста обсуждались теории супергравитации с $N = 1$ с вспомогательными полями. Лекции Гримма содержали описание структуры суперпространства с $N = 1$ и $N = 2$. В моих лекциях обсуждался вопрос о расходимостях в квантовой теории расширенной супергравитации в связи со структурой допустимых контрчленов. Лекции Редже были посвящены так называемому подходу группового многообразия.

Читателю, желающему восполнить пробел, возникающий из-за отсутствия этих лекций, следует обратиться непосредственно к книге "Супергравитация 81" [6], к оригинальным работам упомянутых авторов [8 – 15], сборнику [7] или к обзору П. ван Ньювенхёйзена [16], который довольно полно отражает состояние теории супергравитации в то время и содержит 608 ссылок с названиями статей. Наконец, изучение лекций в данной книге будет более эффективным, если ему будет предшествовать или идти параллельно изучение статей по супергравитации, помещенных в книге "Геометрические идеи в физике" [17].

Мы попытаемся далее кратко обрисовать проблематику и основные достижения теории супергравитации по 1981 г., отсылая читателя за подробностями к предисловию лауреата Нобелевской премии А. Салама, которое превосходно передает полную энтузиазма атмосферу школы, и к указываемой нами литературе[1]. После этого мы опишем основные тенденции в развитии супергравитации по 1984 г., т.е. к моменту, когда пишется данное предисловие, учитывая, что число статей по суперсимметрии и супергравитации за период, прошедший после школы 1981 г., по крайней мере удвоилось.

Почему же теории суперсимметрии и супергравитации исследуются столь интенсивно уже второе десятилетие, хотя до сих пор нет экспериментальных подтверждений того, что эти теории правильно описывают природу? По-видимому, успехи единой теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий [18 – 21] возродили надежду построить единую теорию всех фундаментальных взаимодействий, включая гравитационные. Понятие единой теории поля существует с 20-х годов нашего века. Эйнштейн сформулировал ее программу в Нобелевском докладе в 1923 г. [22]: "Теперь особенно живо волнует умы проблема единой природы гравитационного и электромагнитного полей[2]. Мысль, стремящаяся к единству теории, не может примириться с существованием двух полей, по своей природе совершенно независимых друг от друга. Поэтому делаются попытки построить такую математически единую теорию поля, в которой гравитационное и электромагнитное поле рассматривались бы лишь как компоненты одного и того же единого поля, причем его уравнения, по возможности, уже не состояли из логически независимых друг от друга членов." По-видимому, высшим достижением первой половины века в этой программе можно считать теорию Калуцы – Клейна [23, 24], в которой объединение тяготения и электричества достигалось за счет того, что фундаментальная теория формулировалась как геометрическая теория в пространстве с размерностью $d = 5$. Появление суперсимметрии в 70-х годах было огромным шагом вперед к единой теории, так как был преодолен барьер между бозонами (носителями фундаментальных взаимодействий) и фермионами (материальными частицами) и была обна-

---

[1] Особое внимание в списке литературы мы обратим на исследования советских авторов, которые недостаточно отражены в указанных источниках.

[2] Слабые и сильные взаимодействия в то время еще не были известны.

ружена коренная связь между локальной суперсимметрией и гравитацией.

Важнейшее свойство квантовой теории суперсимметрии и супергравитации — значительное подавление ультрафиолетовых расходимостей в этих теориях, связанное с компенсацией бозонных и фермионных расходимостей и в результате с отсутствием суперсимметричных обобщений некоторых контрчленов, существующих в аналогичных теориях без суперсимметрии [25 — 29], а также с существованием так называемых теорем об отсутствии перенормировки, утверждающих, что некоторые параметры теории не меняются при учете квантовых поправок. Наиболее известный пример такой ситуации — это отсутствие перенормировки массы и взаимодействия в суперсимметричной модели Весса — Зумино с $N = 1$ [5]. Соответствующее сокращение расходимостей объясняется проще всего в суперполевой теории возмущений. В N-расширенной супергравитации следствия этих теорем были изучены в работах [30, 31] в предположениях, что существует N-или $(N/2)$-суперполевая теория возмущений.

Теория супергравитации с самого начала развивалась в двух взаимно дополняющих направлениях — теоретико-полевом (или компонентном) и геометрическом. В первом подходе были построены лагранжианы, обобщающие гравитационные лагранжианы и содержащие (в случае N-расширенной суперсимметрии) все физические частицы, являющиеся партнерами гравитона по супермультиплету: N гравитино, $\frac{1}{2}N(N-1)$ векторных полей, и т.д. Эти теории так называемой чистой супергравитации имеют глобальную $O(N)$-симметрию. Были также построены так называемые калибровочные теории супергравитации, в которых $O(N)$-симметрия становится локальной и кроме гравитационной константы k появляется калибровочная константа g. Первая такая теория с $N = 2$ была построена Фрадкиным и Васильевым [32], и эти авторы показали, что в такой теории появляется масса у гравитино и космологический член. В случае $N = 8$ калибровочная супергравитация была построена сравнительно недавно [33]. Это максимально широкая единая теория супергравитации в 4-мерном пространстве. Такая теория также получается (по крайней мере в линеаризованном приближении) при спонтанной компактификации 11-мерной супергравитации на сфере S^7 [28, 34]. Основной недостаток компонентного подхода состоит в отсутствии явной суперсимметрии, а также и в том, что в теориях с $N \geqslant 3$ и в теориях супергравитации в пространствах с размерностью $d = 10$ и $d = 11$ калибровочная алгебра теории замкнута только на решениях уравнений движения.

Адекватным подходом к описанию супергравитации является геометрический подход, т.е. теория суперпространства с бозонными и фермионными координатами $z^M = (x^\mu, \theta^\alpha)$. В суперпространстве появление гравитино (поля со спином 3/2) столь же естественно, как и появление гравитона — последний связан с бозон-бозонной компонентой метрики $g_{\mu\nu}(x, \theta = 0)$, а гравитино — с бозон-фермионной ее частью $g_{\mu\alpha}(x, \theta = 0)$.

Идейно геометрия супергравитации так же проста и красива, как общая теория относительности Эйнштейна (последняя соответствует супергравитации

с $N = 0$). Фундамент теории составляет принцип относительности (т.е. независимости от выбора системы координат) в суперпространстве.

Пионерские работы по теории суперпространства принадлежат Волкову, Акулову и Сороке [35, 36]. Фундаментальные исследования геометрии супергравитации с $N = 1$ и $N = 2$ в суперпространстве были выполнены Огиевецким и Сокачевым с сотр. [37 – 40]. С формализмами Весса – Зумино и Зигеля – Гейтса читатель ознакомится в книге [17] и в данных лекциях. В работах Шварца и его учеников [41 – 43] исследовалась геометрия супергравитации в связи с комплексной геометрией и теорией G-структур, а в работе Манина [44] – в связи с суперклетками Шуберта.

Теория расширенной супергравитации в пространстве размерности $d = 4$ с $N \geqslant 3$ и теория супергравитации при $d = 11$ исследованы гораздо меньше. В частности, геометрия суперпространства в этих теориях известна только на массовой оболочке [45 – 48]. Аналогом этого в чистой гравитации являются пространства Эйнштейна с $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$. Этих исследований, однако, оказалось достаточно, чтобы показать, что подавление расходимостей имеет место и в этих наиболее интересных теориях, но, к сожалению, только до некоторого порядка [12 – 14, 49] по числу петель.

Фундаментальные проблемы теории супергравитации состоят в необходимости создать последовательный математический аппарат квантовой теории (желательно геометрический) и выяснить связь теории супергравитации с реальностью. Эти проблемы, как подчеркивалось в вводной статье А. Саламом в 1981 г. и как можно повторить и сейчас, еще остаются на повестке дня. Тем не менее за годы, прошедшие после 1-й школы, в теории наблюдался значительный прогресс.

Было осознано, что стандартные модели великого объединения (теории слабых, электромагнитных и сильных взаимодействий) сами по себе не могут решить так называемой проблемы иерархий, т.е., во-первых, объяснить малость отношений масс типа $m_W/m_X \sim 10^{-13}$, $m_W/m_{Pl} \sim 10^{-17}$ и, во-вторых, обеспечить сохранение этой малости с учетом квантовых эффектов. Теории суперсимметрии и супергравитации имеют естественные возможности для решения этой проблемы [50]: 1) скалярные поля в теориях с суперсимметрией находятся в одном мультиплете с фермионами, а последние в силу киральной симметрии не имеют больших квантовых поправок к массам и 2) эти теории характеризуются улучшенным поведением в ультрафиолетовой области. Это привело к интенсивным исследованиям суперобобщений стандартных калибровочных моделей. Лагранжианы, основанные на спонтанно нарушенной супергравитации с $N = 1$ [51], явились основой для феноменологического описания физики элементарных частиц с интересными предсказаниями в области 100 – 1000 ГэВ [52, 53]. Одна из основных задач, стоящая перед новыми ускорителями SLC, Теватрон (США) и LEP (ЦЕРН), которые вступят в строй в ближайшие годы, – это поиск новых суперсимметричных частиц.

Важнейший этап в развитии современной квантовой теории поля связан с обнаружением целого класса конечных (в пространстве с $d = 4$) суперсиммет-

ричных квантовых теорий, в частности суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$. Эти теории свободны от ультрафиолетовых расходимостей, которые неизбежно появлялись во всех моделях квантовой теории поля с момента ее возникновения. Существует несколько возможных объяснений того, что в этих теориях происходит столь замечательное сокращение расходимостей. Одно из них связано с изучением мультиплета аномалий для квантового супертока [54]. Явное конструктивное доказательство конечности суперсимметричных теорий связано с построением квантового формализма на основе суперполей с $N=2$ [31]. При этом теорема об отсутствии перенормировки означает, что в суперсимметричных теориях с $N = 2$ расходимости могут появиться только в однопетлевом приближении в выражении для янг-миллсовской калибровочной константы. Теории суперсимметрии с $N = 2$ конечны также и в однопетлевом приближении при определенных ограничениях на множественность m_i мультиплетов материи, принадлежащих некоторым представлениям R_i калибровочной группы G [31]. Частный случай такой теории, когда $m = 1$ и R – присоединенное представление, это суперсимметричная теория Янга – Миллса с $N = 4$. Для этой последней теории применялся еще один способ доказательства конечности. Теория изучалась в суперпространстве в координатах на световом конусе и исследовался индекс расходимости диаграмм с фейнмановскими правилами в суперпространстве [55, 56]. Дальнейший анализ указанных выше теорий показал, что свойство конечности сохраняется и при добавлении некоторых массовых членов и кубичных взаимодействий. В настоящее время делаются различные попытки использовать конечные суперсимметричные теории Янга – Миллса для построения реалистических калибровочных теорий.

Теории супергравитации в отличие от обсуждавшихся выше теорий с глобальной суперсимметрией имеют размерную константу связи как при $d = 4$, так и при бо́льших размерностях, включая $d = 11$. Одна из кардинальных проблем теории супергравитации связана с ее ультрафиолетовым поведением в рамках теории возмущений, т.е. разложения по числу квантовых петель. Замечательная особенность супергравитации, состоящая в том, что на массовой оболочке теория является геометрической, т.е. существует тензорный анализ, приводит к крайне неприятным следствиям при анализе допустимых контрчленов теории. Так, начиная с 8-петлевого приближения для супергравитации с $N = 8$ и $d = 4$ и с 2-петлевого в случае $N = 1$ и $d = 11$, можно построить контрчлены, не исчезающие на массовой оболочке и имеющие все (известные до сих пор) свойства симметрии теории [12 – 14, 47, 49]. Эти контрчлены имеют вид интегралов по полному объему суперпространства $d^dXd^{32}\theta$ Ber E (Ber E – березиниан, т.е. супердетерминант, репера) от лагранжианов, составленных из суперкривизн, суперкручений и их производных. Более того, для теории с $N = 8$ при $d = 4$, уже начиная с 3-петлевого приближения, существуют допустимые контрчлены, имеющие вид интегралов по подпространству или по полному суперпространству, но с суперсимметрией с $N = 4$ [12, 14]. К сожалению, этот результат, подробное обсуждение которого содержится в работе [29], до сих

пор остается одним из основных сдерживающих моментов на пути построения последовательной квантовой теории супергравитации.

Произвести явные вычисления расходимостей в трехпетлевом (и тем более в 8-петлевом) приближении в максимально расширенной супергравитации крайне трудно. Заметим, что ни в одной гравитационной задаче пока еще не производились вычисления даже в двухпетлевом приближении. Поэтому были предприняты значительные усилия для того, чтобы использовать опыт исследования конечных теорий Янга – Миллса в супергравитации – анализ суперграфов на световом конусе [57], теоремы об отсутствии перенормировки [30, 31] и т.д. Все эти исследования по-прежнему указывают только на частичное подавление расходимостей. Совсем недавно было показано [58], что для максимально расширенных теорий Янга – Миллса в пространствах с $d = 5$, 6, 7, где эти теории имеют размерную константу связи, структура контрчленов, возникающих при учете 4-, 3- и 2-х петель соответственно, полностью совпадает со структурой трехпетлевого контрчлена [12, 14] в супергравитации с $N = 8$ при $d = 4$. Явные двухпетлевые вычисления при $d = 7$ обнаружили расходимости [59]. Это оставляет мало надежды (если только не будут выявлены какие-то новые причины, запрещающие расходимости, соответствующие указанным контрчленам) на то, что теория супергравитации в рамках разложения по петлям будет свободна от расходимостей, т.е. что в наших руках уже имеется последовательный математический аппарат единой квантовой теории поля. В то же время не следует недооценивать уже достигнутого. Известно, что теория гравитации, взаимодействующей с материей, содержит расходимости уже в однопетлевом приближении, тогда как супергравитация с $N = 8$ конечна по меньшей мере в одно- и двухпетлевом приближении.

Для дальнейшего развития теории супергравитации представляется важным разработать геометрический аппарат расширенных теорий супергравитаций вне массовой оболочки[1), что может привести к теоремам об отсутствии перенормировки нового сорта при $N \geqslant 4$. Независимо от этого необходимо изучение конструктивных возможностей выхода за рамки теории возмущений. Важно также изучить и решить проблему унитарности и внутренней самосогласованности конформной супергравитации с $N = 4$, которая, как показали Фрадкин и Цейтлин [61, 62], конечна в однопетлевом приближении, а в соответствии с теоремой об отсутствии перенормировки, по-видимому, конечна и во всех порядках [31]. Теория замкнутой суперсимметричной струны [63], которая в пределе бесконечного натяжения струны соответствует супергравитации с $N = 8$, также является важным объектом для изучения. В первую очередь теория еще должна быть разработана конструктивно; пока известно только, что в однопетлевом приближении она конечна при произвольном натяжении струны.

---

1) Мы имеем в виду продвижение для теории с $N = 8$ такого типа, как сделанное совсем недавно Огиевецким с сотр. [60] в теориях с $N = 2,3$.

Мы переходим теперь к основному фронту исследований в супергравитации периода 1981 – 1984 гг. – к теории супергравитации Калуцы–Клейна [64–67, 28, 34]. Начало исследований этого вопроса обсуждается кратко в лекциях Даффа в настоящем сборнике, в частности, в связи с надеждами на улучшение ультрафиолетового поведения супергравитации при $d = 11$. Однако, как уже говорилось выше, хотя допустимые контрчлены существуют, реальные вычисления произвести сложно и этот вопрос по-прежнему открыт. Но как бы ни был впоследствии решен вопрос о последовательном построении квантовой теории супергравитации, исследования классической теории супергравитации в духе идей Калуцы – Клейна [23, 24, 64 – 67] открывают заманчивые перспективы построения единой картины мира, в которой наш привычный 4-мерный мир – это только мир малых энергий, а в основе лежит многомерный мир ($d = 11$ или $d = 10$ для супергравитации), структура которого объясняет внутренние симметрии фундаментальных взаимодействий, а пространственные размеры в дополнительных измерениях достаточно малы, чтобы быть ненаблюдаемыми при достижимых в наше время энергиях.

Почему же теория супергравитации вдохнула новую жизнь в идеи Калуцы – Клейна полувековой давности? Причина этого состоит, по-видимому, в том, что теория супергравитации с легкостью разрешила некоторые внутренние противоречия в исходной идеологии Калуцы–Клейна, поставив, правда, при этом свои собственные новые проблемы, только часть из которых удалось пока решить, Одна из целей теории Калуцы–Клейна состояла в том, чтобы, исходя из геометрической теории Эйнштейна в пространстве размерности $d > 4$, получить структуру пространства вида $M \times B$, где M – это 4-мерное пространство, а B – компактное $(d-4)$-мерное пространство. При этом в 4-х измерениях появляется теория Эйнштейна – Янга – Миллса, а калибровочная группа определяется группой изометрии пространства B. К сожалению, чистая гравитация в пространстве размерности d не имеет классических решений такого типа, необходимо добавлять поля материи, например поля Янга – Миллса, уже в пространстве размерности d. Эта процедура содержит большой произвол и главное противоречит исходным концепциям, в частности без супергравитации невозможно ввести фермионы геометрически. Теория супергравитации с $N = 1$ при $d = 11$ [68] является, с одной стороны, вполне геометрической теорией[1)], а с другой – допускает спонтанную компактификацию теории, т.е. имеет классические решения указанного выше вида [67]. Среди большого числа решений в теории супергравитации Калуцы – Клейна имеются и решения с калибровочной группой стандартной теории, т. е. $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [70, 71]. Кроме того, чтобы получить в 4 измерениях фермионы со спином ½, практически несбходимо при $d > 4$ иметь поля Рариты – Швин-

---

[1)] Отметим в этой связи работу [69], в которой 11-мерная супергравитация в отличие от исходного лагранжиана Креммера – Жулиа – Шерка [68] (см. лекции Креммера в данном сборнике) описана только в геометрических терминах, а полностью антисимметричный тензор третьего ранга $A_{\mu\nu\lambda}(e, \hat{\omega}, \psi)$ – стабилизатор компактифицирующих решений – является суперковариантизованным тензором кручения 11-мерной теории.

гера, т. е. мы опять почти с неизбежностью приходим к супергравитации, ибо только в ее рамках возможно непротиворечивое описание взаимодействия гравитино.

Огромное количество работ по супергравитации Калуцы – Клейна посвящено в основном следующим вопросам: поискам компактифицирующих решений и условий их стабильности, изучению симметрий этих решений, анализу получающихся при этом эффективных 4-мерных теорий супергравитации со спонтанно нарушенной суперсимметрией, изучению спектров возникающей в теории бесконечной "башни" состояний, т.е. гармоническому анализу на компактных многообразиях и т.д. Новые перспективы построения единой теории связаны со свободными от аномалий и конечными в 1-й петле суперструнами, в пределе низких энергий переходящими в N = 1, d = 10-эйнштейн-янг-миллсовскую супергравитацию с калибровочной группой $SO(32)$ или $E_8 \times E_8$ [72].

Возможно, что сейчас, как и в начале века, когда была выдвинута программа единой теории поля, нам все еще недостает каких-то существенных ингредиентов теории, как недоставало суперсимметрии полвека назад. Но сейчас уже трудно представить себе развитие теории фундаментальных взаимодействий без опыта теории супергравитации. По меньшей мере можно ожидать, что она будет таким же блоком в фундаменте будущей теории, каким является теория гравитации Эйнштейна в современных теориях расширенных супергравитаций.

Хочется надеяться, что издание книги послужит важному делу – привлечению к исследованию супергравитации научной молодежи, которая легче преодолевает барьеры, связанные с техническими трудностями и быстротой развития этой теории.

Введение Салама, лекции Стретди, Тейлора и Грисару переведены д-ром физ.-мат. наук Д.В.Гальцовым, лекции ван Ньювенхёйзена, Даффа, Де Вита и Креммера переведены канд. физ.-мат. наук А.А.Цейтлиным.

Р. Э. Каллош

Литература

1. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* Progress towards a theory of supergravity. Phys. Rev., **D13**, 3214 (1976).
2. *Deser S., Zumino B.* Consistent supergravity. Phys. Lett., **62B**, 335 (1976).
3. *Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П.* Расширение алгебры генераторов группы Пуанкаре и нарушение P-инвариантности. – Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с.452.
4. *Волков Д.В., Акулов В.П.* О возможном универсальном взаимодействии нейтрино. – Письма ЖЭТФ, 1972, т. 16, с. 621.
5. *Wess J., Zumino B.* A Lagrangian model invariant under supergauge transformation. Phys. Lett., **49B**, 52 (1974).

6. Supergravity 81, eds. S. Ferrara, J.G. Taylor, Cambridge University Press, 1982.
7. Supersymmetry and Supergravity 82, eds. S. Ferrara, J.G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen. World Scient., 1983.
8. *Феррара С.* Перспективы теорий супергравитации. В книге [17].
9. *Stelle K., West P.* Minimal Auxiliary fields for Supergravity. Phys. Lett., **74B**, 330 (1978).
10. *Sohnius M., West P.* Alternative Minimal Off-shell version of N = 1 supergravity. Phys. Lett., **105B**, 353 (1981).
11. *Гримм Р., Весс Й., Зумино Б.* Полное решение тождеств Бьянки при учете супергравитационных связей в суперпространстве. В книге [17].
12. *Kallosh R.E.* Counterterms in extended supergravities. Phys. Lett., **99B**, 122 (1981).
13. *Каллош Р.Э.* Одно- и двухпетлевые инварианты в расширенных супергравитациях. – Письма ЖЭТФ, 1981, т. 33, с. 292.
14. *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* Superactions. Nucl. Phys. **B191**, 445 (1981).
15. *D'Adda A., D'Auria R., Fré P., Regge T.* Geometrical formulation of supergravity theories on orthosymplectic supergroup manifolds. Rivista del Nuovo Cimento, **6** (1980).
16. *van Nieuwenhuizen P.* Supergravity. Phys. Rep., **68**, 189 (1981).
17. Геометрические идеи в физике: Сб. статей/Под ред. Ю.И. Манина. – М.: Мир, 1983.
18. *Вайнберг С.* Идейные основы единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий. – УФН, 1980, т. 132, с. 201.
19. *Глэшоу Ш.* На пути к объединенной теории– нити в гобелене. – УФН, 1980, т. 132, с. 219.
20. *Салам А.* Калибровочное объединение фундаментальных сил. – УФН, 1980, т. 132, с. 229.
21. *Окунь Л.Б.* Лептоны и кварки. – М.: Наука, 1981.
22. *Эйнштейн А.* Основные идеи и проблемы теории относительности: Собр. научн. трудов, т. 2, с. 127. – М.: Наука, 1966.
23. *Kaluza Th.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys., **K1**, 966 (1921).
24. *Klein O.* Zs. Phys., **37**, 895 (1926).
25. *Grisaru M., van Nieuwenhuizen P., Vermaseren J.A.M.* One-loop renormalizability of supergravity and of Einstein-Maxwell theory in extended supergravity. Phys. Rev. Lett., **37**, 1662 (1976).
26. *Grisaru M.* Two-loop renormalizability of supergravity. Phys. Lett., **B66**, 75 (1977).
27. *Deser S., Kay J., Stelle K.* Renormalizability properties of supergravity. Phys. Rev. Lett., **38**, 527 (1977).
28. *Дафф М.* Ультрафиолетовые расходимости в расширенной супергравитации. Лекции в данном сборнике (с. 129).

29. *Kallosh R.E.* Counterterms in extended supergravities. В книге [6].
30. *Grisaru M.T., Siegel W.* Supergravity (II). Manifestly covariant rules and higher-loop finiteness. Nucl. Phys., **B201**, 292 (1982).
31. *Howe P.S., Stelle K., Townsend P.K.* Miraculous ultraviolet cancellations in supersymmetry made manifest. Nucl. Phys., **B236**, 125 (1984).
32. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* SO(2) supergravity with minimal electromagnetic interaction, 1, 5 order formalism and the explicit form of the structure coefficient. Препринт № 197 ФИАН СССР им. П.Н. Лебедева, 1976.
33. *de Witt B., Nicolai H.* N = 8 supergravity. Nucl. Phys., **B208**, 323 (1982).
34. *Duff M.J., Pope C.N.* Kaluza – Klein supergravity and the seven sphere. В книге [7].
35. *Акулов В.П., Волков Д.В., Сорока В.А.* О калибровочных полях на суперпространствах с различными группами голономии. – Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 396.
36. *Акулов В.П., Волков Д.В., Сорока В.А.* Об общековариантных теориях калибровочных полей на суперпространстве. – ТМФ, 1977, т. 31, с. 12.
37. *Огиевецкий В.И., Сокачев Э.* Уравнения движения для суперполей. – В сб.: Нелокальные нелинейные и перенормируемые теории поля. Дубна, 1976.
38. *Огиевецкий В.И., Сокачев Э.* Простейшая группа супергравитации Эйнштейна. – ЯФ, 1980, т. 31, с. 264.
39. *Огиевецкий В.И., Сокачев Э.* Гравитационное аксиальное суперполе и формализм дифференциальной геометрии. – ЯФ, 1980, т. 31, с. 821.
40. *Огиевецкий В.И., Сокачев Э.* Кручение и кривизна в терминах аксиального суперполя. – ЯФ, 1980, т. 32, с. 870.
41. *Gayduk A.V., Romanov V.N., Schwarz A.S.* Supergravity and field space democracy. Commun. Math. Phys., **79**, 507 (1981).
42. *Schwarz A.S.* Supergravity, complex geometry and G-structures. Commun. Math. Phys., **87**, 37 (1982).
43. *Рослый А.А., Шварц А.С.* Геометрия неминимальной и альтернативной минимальной супергравитации. – ЯФ, 1983, т. 37, с. 786.
44. *Манин Ю.И.* Геометрия супергравитации и суперклетки Шуберта. – Записки научн. семинаров ЛОМИ, 1984, т. 133, с. 160.
45. *Brink L., Howe P.* The N = 8 supergravity in superspace. Phys. Lett., **88B**, 268 (1979).
46. *Howe P.* Supergravity in superspace. Nucl. Phys., **B199**, 309 (1982).
47. *Cremmer E., Ferrara S.* Formulation of 11-dimensional supergravity in superspace. Phys. Lett., **91B**, 61 (1980).
48. *Brink L., Howe P.S.* Eleven-dimensional supergravity on the mass shell in superspace. Phys. Lett., **91B**, 384 (1980).
49. *Howe P.S., Lindström U.* Higher order invariants in extended supergravity. Nucl. Phys., **B181**, 487 (1981).
50. *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmmetry. Nucl. Phys. **B185**, 513 (1981).

51. *Cremmer E., Ferrara S., Griardello L., Van Proeyen A.* Yang – Mills theories with local supersymmetry. Nucl. Phys., **B212**, 413 (1983).
52. Supersymmetry confronting experiment, eds. D.V. Nanopoulos, A. Savoy-Navarra. Phys. Reports **105**, 1 (1984).
53. *Высоцкий М.И.* Суперсимметричные модели элементарных частиц. Препринты ИТЭФ – 119, ИТЭФ – 120 УФН, в печати.
54. *Sohnius M.F., West P.C.* Conformal invariance in N = 4 supersymmetric Yang – Mills theory. Phys. Lett., **100B**, 245 (1981).
55. *Mandelstam S.* Light-cone superspace and the ultraviolet finiteness of the *N* = 4 model. Nucl. Phys., **B213**, 149 (1983).
56. *Brink L., Lindgren O., Nilsson B.E.W.* The ultra-violet finiteness of the N = 4 Yang – Mills theory. Phys. Lett., **123B**, 323 (1983).
57. *Taylor J.G.* Extended superspace supergravities in the light-cone gauge. King's College preprint (1982).
58. *Howe P.S., Stelle K.* Ultraviolet divergencies in higher dimensional supersymmetric Yang – Mills theories. Phys. Lett. **137B**, 175 (1984).
59. *Marcus N., Sagnotti A.* Preprint CALT – 68 – 1129 (1984).
60. *Galperin A. et al.* Unconstrained N = 2 matter, Yang – Mills and supergravity theories in harmonic syperspace, Class. Quantum. Grav., 1, 469 (1984); Unconstrained off-shell N = 3 supersymmetric Yang – Mills theory. Preprint E 2 – 84 – 441 Dubna, 1984.
61. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* One-loop β-function in conformal supergravities. Nucl. Phys., **B203**, 157 (1982).
62. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories. Phys. Lett., **134B**, 187 (1984).
63. *Schwarz J.H.* Superstring theory. Phys. Rep., **89**, 223 (1982).
64. *Freund P.G.O., Rubin M.A.* Dynamics of dimensional reduction. Phys. Lett., **97B**, 233 (1980).
65. *Englert F.* Spontaneous compactification of 11-dimensional supergravity. Phys. Lett., **119B**, 339 (1982).
66. *Englert F., Nicolai H.* Supergravity in eleven-dimensional space-time, CERN preprint TH. 3711 (1983).
67. *Duff M.J., Nillson B.E.W., Pope C.N.* Superunification from eleven dimensions. Nucl. Phys., **B233**, 433 (1984).
68. *Cremmer E., Julia B., Scherk J.* Supergravity theory in 11-dimensions. Phys. Lett., **76B**, 409 (1978).
69. *Kallosh R.E.,* Geometry of 11-dimensional supergravity. Phys. Lett., **143B**, 373 (1984).
70. *Волков Д.В., Сорокин Д.П., Ткач В.И.* Механизм спонтанной компактификации $N = 2$ $d = 10$ супергравитации. – Письма ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 397.
71. *Castellani L., D'Auria R., Fré P.* $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ from $d = 11$ supergravity. Torino preprint IFTT 427 (1983). Nucl. Phys. (В печати).
72. *Green M.B., Schwarz J.H.* Infinity cancellation in *SO* (32) supersymmetry theory. Phys. Lett., **151B**, 21 (1985).

ВВЕДЕНИЕ

Дж. Салам*

Суперсимметрия, т.е. симметрия между бозонами и фермионами, – это симметрия, которая не кажется естественной и очевидной. Она могла бы быть открыта в любое время после 1935 г., когда были установлены каноны квантовой теории полей. Однако даже в 1971 г., когда мысль о возможности такой симметрии впервые зародилась в Советском Союзе, существование суперсимметрии осталось незамеченным, а ее значение – непонятным. Такое положение сохранялось до 1973 г., когда эта симметрия была открыта заново. Но даже и после этого, хотя уже была признана вся ее красота, осознана свобода суперсимметричных лагранжианов от теоретико-полевых расходимостей и установлено замечательное свойство положительности суперсимметричных гамильтонианов, из-за отсутствия прямых указаний на ее реальное существование в природе суперсимметрия по-прежнему не привлекала к себе большого внимания.

Ход развития после 1973 г. хорошо известен. Во-первых, было замечено существование расширенных суперсимметрий ($N = 2, 3, \ldots$), в которых внутренние симметрии объединяются с простой суперсимметрией ($N = 1$), и сопутствующая возможность введения центральных зарядов. Во-вторых, был разработан метод описания простой суперсимметрии с $N = 1$ на основе представлений о суперпространстве и суперполях.

В 1976 г. была решена важнейшая задача суперсимметризации теории гравитации и высказаны предположения о существовании гравитонов со спином 3/2. Построение расширенных теорий супергравитации ($N = 2, 3, \ldots, 8$) породило надежду на то, что частицы со спином 1 и 2, посредники всех четырех фундаментальных взаимодействий (в том числе и гравитации), плюс хиггсовы частицы, а также материальные "источники" (частицы с полуцелыми спинами) удастся объединить в один супермультиплет расширенной теории супергравитации, объединив тем самым "мрамор" гравитации с "каркасом" материи – как мечтал Эйнштейн.

Однако уже тогда стало ясно, что даже в максимальной расширенной теории супергравитации ($N = 8$) спектр частиц недостаточно широк для того, чтобы описать известные в настоящее время кварки, лептоны и калибровочные частицы. Было также установлено, что после калибровки любая такая теория должна содержать две константы связи: ньютоновскую и неприемлемо большую

---

* *A. Salam*, директор Международного центра теоретической физики, Триест.

космологическую постоянную, вместо постоянной тонкой структуры. Поэтому было высказано предположение, что супермультиплет расширенной супергравитации с $N=8$ описывает не сами кварки, лептоны и калибровочные частицы, а некие преоны, из которых построены названные частицы.

В техническом отношении стало ясно, что геометризация физики, начавшаяся с революционной эйнштейновской идеи связать гравитацию с кривизной пространства-времени, не будет полной, пока не удастся построить супергравитационные теории, опираясь на геометрические величины (суперкривизну и суперкручение) в расширенном пространстве-времени – расширенном включением бозонов в случае компактифицированных теорий типа Калуцы – Клейна для целого спина и включением фермионов – в случае искривленного суперпространства. Две эти проблемы – физический смысл теорий супергравитации и геометризация динамики в терминах суперпространства – еще остаются на повестке дня.

Весеннюю школу в Триесте, состоявшуюся в период с 22 апреля по 3 мая 1981 г., лекции которой составляют содержание настоящей книги, можно по-видимому, считать первой попыткой систематического и полного освещения современного состояния теорий суперсимметрии и супергравитации. В этих лекциях после введения в глобальные суперсимметричные теории, сделанного Стретди, Тейлор вводит расширенные суперсимметрии, вспомогательные поля и суперполевые лагранжианы, включая лагранжианы для линеаризованных теорий супергравитации с $N = 1, 2$. Далее следует анализ спектра мультиплетов в расширенных суперсимметричных теориях (Феррара) и лекции Грисару, посвященные суперполевой технике возмущений. Затем Вест обсуждает локальное полевое представление суперсимметрии с $N = 1$, давая минимальный вариант супергравитации с $N = 1$. Чисто супергравитационные теории, без использования суперполей, являются предметом лекций ван Ньювенхёйзена, в которых показано, как в низшем нетривиальном порядке в супергравитации возникают конечные матричные элементы S-матрицы. За этим следует анализ однопетлевых контрчленов для расширенных калибровочных теорий супергравитации, данный Даффом, с демонстрацией того, что при $N > 4$ определенный выбор скалярных полей обеспечивает равенство нулю соответствующей β-функции.

Метод построения лагранжианов супергравитации Пуанкаре путем редукции из суперконформных супергравитационных теорий с $N = 2$ и $N = 4$ излагается Де Витом, тогда как Креммер выполняет такое построение при $N = 8$, выявляя также скрытые симметрии получающегося лагранжиана путем редукции простой супергравитации $N = 1$ в 11-мерном пространстве-времени в физическое пространство. Суперполевой подход к супергравитации вместе с исследованием необходимых связей и бесконечностей, возникающих при учете высших петель, является предметом лекций Гримма и Каллош. И наконец, Редже излагает альтернативный подход к построению лагранжианов супергравитации, основанный на методе группового многообразия, приверженцем которого он является вместе со своими коллегами.

Такое поверхностное перечисление тем лекций, конечно, не передает всего богатства их содержания, отражающего состояние этой развивающейся по-

добно взрыву области исследований с соперничающими в настоящий момент разнообразными подходами. Основные проблемы, которые стоят сейчас перед теорией, таковы: 1) построение лагранжианов расширенных теорий супергравитации вне массовой оболочки (в том смысле, что супералгебра должна замыкаться без использования уравнений движения), 2) объединение динамики и геометрии, которое, как мы надеемся, может быть достигнуто в рамках суперпространственной формулировки, 3) выяснение смысла центральных зарядов, 4) доказательство того, что теории супергравитации с $N > 4$ или по крайней мере с $N = 8$ имеют S-матрицу, не содержащую расходимостей, 5) выяснение физического смысла теорий супергравитации и, в частности, возможности суперобъединения всех фундаментальных сил и частиц на основе теории с $N = 8$.

Если говорить о несколько более скромном уровне, то в последнее время возродился интерес к суперсимметричным теориям великого объединения (не охватывающего гравитацию) в связи с тем, что единственной "естественной" теорией легких хиггсовых частиц является суперсимметричная теория, в которой хиггсовы частицы образуют единый мультиплет с киральными полями фундаментальных фермионов. Такие теории позволяют надеяться на возможность проявления суперсимметрии при сравнительно низких энергиях $\sim$100 ГэВ, в противоположность дальнему прицелу супергравитационных теорий, для которых точная симметрия, вероятно, будет проявляться лишь при энергиях порядка планковской. В свете таких надежд организация школы по супергравитации и публикация лекций представляются вполне своевременными. Выражаем благодарность лекторам, а также директорам школы профессорам Дж. Тейлору, С. Ферраре и Р. Йенго.

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРСИММЕТРИЮ

Дж. Стретди*

Исследуются общие свойства глобальной суперсимметрии. Определяется алгебра суперсимметрии, кратко описаны ее унитарные неприводимые представления. Вводятся суперполя и суперпространство и анализируется их роль в реализации симметрии. Приводятся примеры лагранжианов, показывающие, как глобальная и локальные внутренние симметрии вводятся в суперсимметричную теорию. В заключение обсуждаются некоторые особенности спонтанного нарушения суперсимметрий.

§ 1. Введение

Суперсимметрия есть расширение пространственно-временных симметрий. От обычных внутренних симметрий она отличается тем, что объединяет в одном неприводимом мультиплете состояния с разными угловыми моментами. А именно, она объединяет фермионы и бозоны. Возможно, что такая симметрия имеет место в действительности, но она весьма интересна и с чисто математической точки зрения и, безусловно, заслуживает дальнейшего исследования.

Хотя теория суперсимметрии оказывается довольно сложной, идея, лежащая в ее основе, проста и сводится к следующему. Обычное пространство Минковского, обладающее, как известно, симметрией относительно группы Пуанкаре, может обладать некой дополнительной, пока еще неизвестной симметрией, так что группа Пуанкаре – это лишь подгруппа множества пространственно-временных симметрий. Конечно, в природе существуют и другие симметрии, такие, как симметрия электромагнитного взаимодействия $U(1)$, которые, возможно, тоже уходят корнями в структуру пространства-времени, но нас здесь интересуют только те преобразования симметрии, которые нетривиальным образом действуют на сами пространственно-временные координаты. Генераторы суперсимметрии удовлетворяют этому требованию, так как они не коммутируют с генераторами группы Пуанкаре. Дело в том, что новые генераторы несут угловой момент. Благодаря этому они и позволяют объединить частицы с разными спинами.

Поскольку суперсимметрия связана с присоединением новых генераторов к генераторам группы Пуанкаре, результат такого присоединения иногда называют "расширенной" группой Пуанкаре. Можно полагать, что подобная симметрия наиболее естественно выражается в своем действии в некотором специ-

***J. Strathdee, Международный центр теоретической физики, Триест, Италия.**

альным образом "расширенном" пространстве-времени. В соответствии с такой гипотезой вводится понятие суперпространства. Точки суперпространства задаются восемью координатами (x_μ, θ_α), причем новые координаты θ_α предполагаются антикоммутирующими. При обычных преобразованиях Лоренца они ведут себя как компоненты 4-компонентного майорановского спинора. В суперпространстве вводятся поля, которые, как будет показано, можно разложить на компоненты, имеющие вид обычных полей Ферми и Бозе. Будут изложены также методы построения инвариантных функционалов действия, и в заключение мы остановимся на некоторых особенностях спонтанного нарушения суперсимметрии. Об одном из самых замечательных свойств теорий с суперсимметричными лагранжианами, о сокращении ультрафиолетовых расходимостей из-за недостатка места, мы упомянем лишь мимоходом. Подробно данный вопрос разбирается в обзоре [2][1)]. Суперпространственный подход подробнее освещается в обзоре Салама и Стрэтди [1]. Новые соображения о природе спонтанного нарушения суперсимметрии можно найти в последних работах Виттена [3].

Простейшая алгебра суперсимметрии порождается четырнадцатью эрмитовыми операторами. В их число входят десять генераторов P_μ и $J_{\mu\nu}$ группы Пуанкаре и четыре антикоммутирующих генератора Q_α, которые можно назвать супертрансляциями. Для генераторов группы Пуанкаре выполняются обычные перестановочные соотношения. Новые генераторы Q_α удовлетворяют соотношениям

$$[Q_\alpha, P_\mu] = 0, \tag{1.1а}$$

$$[Q_\alpha, J_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} (\sigma_{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta, \tag{1.1б}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = -(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu . \tag{1.1в}$$

Первое из этих соотношений показывает, что на Q_α не влияют пространственно-временные трансляции, а второе – что при однородных преобразованиях группы Лоренца генератор Q_α преобразуется как дираковский спинор. Антикоммутационное соотношение (1.1в) означает, что супертрансляции не являются независимыми, и оно есть важнейший элемент рассматриваемой симметрии. Генераторы Q_α должны удовлетворять условию действительности

$$Q_\alpha = C_{\alpha\beta}\bar{Q}^\beta \tag{1.2}$$

и потому представляют собой компоненты майорановского спинора. (Матрица зарядового сопряжения C антисимметрична и обладает свойством $C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T$, откуда следует, что матрица $\gamma_\mu C$ симметрична.)

Расширенная суперсимметрия порождается множеством майорановских спиноров $Q_{\alpha j}$, $j = 1, 2, \ldots, N$. В этом случае правило (1.1в) заменяется соот-

1) Изучение суперсимметрии лучше всего начать с обзора Огиевецкого и Мизинческу [4]. – *Прим. ред.*

ношением

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = -\delta_{ij}(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta} P_\mu + C_{\alpha\beta} Z_{ij} + (\gamma_5 C)_{\alpha\beta} Z'_{ij}, \qquad (1.1\text{в}')$$

где Z_{ij} и Z'_{ij} – генераторы, антисимметричные по i, j. Эти генераторы получили название центральных зарядов, поскольку они коммутируют со всеми генераторами системы. Мы будем рассматривать лишь простую суперсимметрию с $N = 1$.

Структуру унитарных неприводимых представлений нетрудно найти,пользуясь методами Вигнера. Прежде всего базисные векторы $|p>$ для массивных состояний можно получить, применив лоренцевы бусты к множеству состояний покоя. Набор состояний с фиксированным значением 4-импульса p_μ инвариантен относительно действия операторов Q_α в силу соотношения (1.1а). На множестве этих состояний правая часть равенства (1.1в) становится c-числовой матрицей $-\hat{p}C$. Это значит, что четыре компоненты Q_α порождают алгебру Клиффорда и могут быть представлены матрицами 4×4. Множество состояний с фиксированным 4-импульсом под действием супертрансляций редуцируется на 4-мерные инвариантные подпространства. С другой стороны, состояния покоя разбиваются на $(2j + 1)$-мерные подпространства под действием трехмерных вращений. Следовательно, неприводимые представления расширенной симметрии образуются $4(2j + 1)$ состояниями покоя. К ним можно применить бусты вигнеровским методом, чтобы получить полный базис неприводимого представления. Типичное представление характеризуется двумя инвариантами – массой $p_\mu^2 = M^2 > 0$ и спином j. Спиновый состав состояний покоя таков:

$$j \oplus \left(j - \frac{1}{2}\right) \oplus \left(j + \frac{1}{2}\right) \oplus j. \qquad (1.3)$$

(Если $j = 0$, то представление $j - 1/2$, конечно, отсутствует.)

В безмассовом случае также можно воспользоваться методом Вигнера, выбрав в качестве исходного множества состояний с фиксированным изотропным 4-импульсом вместо состояний покоя. В этом случае правая часть равенства (1.1в) становится числовой матрицей второго ранга. Следовательно, множество состояний с фиксированным изотропным 4-импульсом под действием супертрансляций разлагается на двумерные инвариантные подпространства. Типичное светоподобное представление расширенной алгебры Пуанкаре, помимо равенства $p_\mu^2 = 0$, характеризуется определенной спиральностью λ. Оно содержит два неприводимых представления группы Пуанкаре со спиральностями

$$\lambda \oplus \lambda + \frac{1}{2}. \qquad (1.4)$$

Унитарными представлениями (1.3) и (1.4) определяется базис одночастичных состояний в суперсимметричных теориях. Можно построить для таких теорий лагранжеву динамику, если ввести локальные интерполирующие поля. Хотя

такой лагранжиан может быть выражен через обычные поля Ферми и Бозе в 4-мерном пространстве-времени, подобное описание не будет в должной степени симметричным. В данных лекциях я введу понятие "суперполей", заданных в "расширенном" пространстве-времени и обладающих суперсимметрией в явной форме.

Подобно тому как обычное пространство-время можно представить в виде фактор-пространства:

$$\text{Пространство-время} = \frac{\text{Группа Пуанкаре}}{\text{Группа Лоренца}},$$

суперпространство можно определить как новое фактор-пространство:

$$\text{Расширенное пространство-время} = \frac{\text{Расширенная группа Пуанкаре}}{\text{Группа Лоренца}}.$$

Так как расширенная группа Пуанкаре имеет 14 параметров, суперпространство будет параметризоваться восемью координатами. Можно, например, выбрать

$$e^{i x_\mu P_\mu} e^{i \bar{\theta}^\alpha Q_\alpha},$$

где x_μ – обычная координата Минковского, а θ_α – майоранов спинор. Исходя из алгебры (1.1), можно вывести закон преобразования x и θ под действием супертрансляций. Результат выглядит так:

$$x_\mu \to x_\mu + \frac{i}{2} \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\theta, \qquad (1.5)$$
$$\theta \to \theta + \varepsilon,$$

где ε – майоранов спинор, задающий супертрансляцию. Суперполе $\Phi(x, \theta)$ есть просто некая функция (операторнозначная в квантованной теории), заданная в расширенном пространстве-времени, т.е. суперпространстве. Некоторые свойства таких полей рассматриваются в следующем параграфе.

§ 2. Суперполя

Представляется естественным потребовать, чтобы суперполя в определенном смысле были локальными. Под этим мы будем подразумевать, что

$[\Phi(x, \theta), \Phi(x', \theta')] = 0$ для пространственно-подобных $x - x'$.

Чтобы уяснить, что это означает, рассмотрим первые несколько членов разложения по степеням θ:

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \bar{\theta}\,\psi(x) + \ldots \qquad (2.2)$$

Если $A(x)$ – скаляр, то величина $\psi(x)$ должна быть, очевидно, спинором. Следовательно, чтобы сохранилась обычная связь между спином и статистикой, член $A(x)$ должен быть коммутирующим (бозонным) полем, а множитель $\psi(x)$ – антикоммутирующим (фермионным) полем. В то же время из равенства (2.2) следует, что произведение $\bar\theta\psi$ должно быть полем бозонного типа, как и A. Стало быть, сами координаты θ должны быть антикоммутирующими:

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\} = 0. \tag{2.3}$$

Это важно, поскольку отсюда следует, что в разложении (2.2) должно быть конечное число членов. В самом деле, поскольку θ_α имеет лишь четыре компоненты (и $\bar\theta$ не является независимой величиной), ряд должен заканчиваться членом четвертого порядка. Невозможно построить необходимые нам антисимметричные тензоры $\theta_{\alpha_1}, \theta_{\alpha_2}, \ldots$ ранга выше четвертого. Поэтому разложение (2.2) на самом деле представляет собой полином четвертого порядка. Для удобства запишем его в следующем виде:

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \bar\theta\psi(x) + \frac{1}{4}\bar\theta\theta F(x) + \frac{1}{2}\bar\theta\gamma_5\theta G(x) +$$

$$+ \frac{1}{4}\bar\theta i\gamma_\nu\gamma_5\theta V_\nu(x) + \frac{1}{4}\bar\theta\theta\bar\theta\chi(x) + \frac{1}{32}(\bar\theta\theta)^2 D(x), \tag{2.4}$$

где A, F, G, D – скаляры, V_ν – вектор, а ψ, χ – спиноры. Все эти "компонентные" поля могут быть либо комплексными (в более общем случае они могут принадлежать одному и тому же представлению любой группы симметрии, коммутирующей с группой симметрии расширенного пространства), либо действительными, если спиноры ψ, χ действительны в смысле Майораны (1.2). Суперполе $\Phi(x, \theta)$ можно выбрать преобразующимся, как спинор или тензор, а не скаляр. В таком случае компонентные поля A, ψ, F, ... должны нести соответствующий спинорный или тензорный индекс.

Не представляет особого труда вывести правила преобразований компонентных полей в (2.4) при супертрансляциях (1.5). Для бесконечно малого ε будем иметь

$$\delta A = \bar\varepsilon\psi,$$

$$\delta\psi = \frac{1}{2}(F + \gamma_5 G + i\gamma_\nu\gamma_5 V_\nu - i\hat\partial A)\varepsilon,$$

$$\delta F = \frac{1}{2}\bar\varepsilon\psi - \frac{1}{2}\bar\varepsilon i\hat\partial\psi$$

и т.д. Но такие преобразования оказываются приводимыми. Простейший способ убедиться в этом – построить набор дифференциальных операторов D_α, антикоммутирующих с супертрансляциями.

Чтобы определить дифференциальные операторы в суперпространстве, не-

обходимо принять некоторое соглашение. Мы предлагаем определить производную $\partial/\partial\bar{\theta}^{\alpha}$ равенством

$$\delta\bar{\Phi} = \delta\bar{\theta}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\bar{\theta}} = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\,\delta\theta, \tag{2.5}$$

где бесконечно малая вариация $\delta\bar{\theta}$ стоит *слева*, а $\delta\theta$ — *справа*. Если Φ — действительный скаляр, то $\partial\Phi/\partial\bar{\theta}$ — майоранов спинор. Вариацию $\delta\Phi$ при супертрансляциях (1.5) можно записать в компактной форме

$$\delta\Phi = -\bar{\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + \frac{i}{2}\,\gamma_\mu\theta\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}\right)\Phi. \tag{2.6}$$

Как нетрудно убедиться, дифференциальный оператор (2.6), порождающий супертрансляции, антикоммутирует с оператором D, заданным в виде

$$D = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} - \frac{i}{2}\,\gamma_\mu\theta\,\frac{\partial}{\partial x_\mu}. \tag{2.7}$$

Можно показать, что дифференциальные операторы D_α удовлетворяют антикоммутационным соотношениям

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = -i\,(\gamma_\mu C)_{\alpha\beta}\,\frac{\partial}{\partial x_\mu},$$

откуда следует, что их киральные проекции

$$D = \frac{1 - i\gamma_5}{2}\,D \tag{2.8}$$

антикоммутируют. Это означает, что условия

$$D_-\Phi = 0 \tag{2.9}$$

совместны, а также ковариантны по отношению к полной суперсимметрии. Решением уравнения (2.9) являются суперполя вида

$$\Phi_+(x,\ \theta) = \exp\left(-\frac{1}{4}\,\bar{\theta}\hat{\partial}\gamma_5\theta\right)\left(A_+(x) + \bar{\theta}_-\psi_+(x) + \frac{1}{2}\,\bar{\theta}_-\theta_+F_+(x)\right), \tag{2.10}$$

где через $\theta_\pm$ обозначены киральные проекции координаты θ. Поле Φ_+ получило название кирального суперполя; его независимые компоненты преобразуются при супертрансляционных по правилам

$$\delta A_+ = \bar{\varepsilon}\psi_+,$$

$$\delta\psi_+ = F_+\varepsilon_+ - i\,\hat{\partial}A_+\varepsilon_-, \tag{2.11}$$

$$\delta F_+ = \bar{\varepsilon}_+ i\,\hat{\partial}\psi_+.$$

Скалярные компоненты A_+, F_+ обязательно комплексны, а спинорная компонента ψ_+ имеет положительную киральность. (Можно также ввести другое киральное суперполе Φ_-, преобразующееся, как комплексно сопряженное суперполе Φ_+^*, неэквивалентное суперполю Φ_+.)

Но у скалярного суперполя имеется ещё одна часть. Это так называемое "поперечное векторное" суперполе Φ_1:

$$\Phi_1(x, \theta) = A_1(x) + \bar{\theta}\psi_1(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\, i\, \gamma_\nu\gamma_5\theta V_{1\nu}(x) + \frac{1}{4}\bar{\theta}\theta\,\bar{\theta}\, i\,\hat{\partial}\psi_1(x) + $$

$$+\frac{1}{32}(\bar{\theta}\theta)^2\partial^2 A_1(x), \tag{2.12}$$

определяемое условием второго порядка $\bar{D}_+D_-\Phi_1 = 0$. Соответствующие компонентные поля преобразуются по формулам

$$\delta A_1 = \bar{\varepsilon}\psi_1,$$

$$\delta\psi_1 = \frac{1}{2}(i\ \gamma_\nu\gamma_5 V_{1\nu} - i\,\hat{\partial}A_1)\varepsilon, \tag{2.13}$$

$$\delta V_{1\nu} = -\bar{\varepsilon}\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 i\partial_\nu\psi_1.$$

Здесь компоненты могут быть действительными, а векторная компонента $V_{1\nu}$ обязательно поперечна.

Поскольку определяющее уравнение (2.1) линейно, произведение двух киральных скаляров Φ_+ тоже кирально. Произведения же, содержащие Φ_+ и Φ_+^* или Φ_1, не киральны. Такие произведения дают приводимые суперполя.

Наконец, чтобы построить действие для суперполей, необходимо уметь строить из них интегральные инварианты. Допустим, что плотность лагранжиана состоит из сумм произведений $\Phi_+(x, \theta)$ и $\Phi_+^*(x, \theta)$. Тогда она должна иметь форму скалярного суперполя $\mathcal{L}(x, \theta)$ и ее можно представить в виде полинома по θ. Под действием супертрансляций компоненты плотности $\mathcal{L}$ будут преобразовываться так, как указано выше. В частности, ее D-компонента $\mathcal{L}_D(x)$ будет приобретать добавку в виде 4-дивергенции. Следовательно, интеграл

$$\int d^4x\mathcal{L}_D(x)$$

действительно является инвариантом. Далее, D-компоненту суперполя можно получить путем четырехкратного дифференцирования по θ. Но эту операцию можно понимать и как *интегрирование*. В самом деле, хотя это и может показаться парадоксальным, интеграл по антикоммутирующей переменной, например по координате θ_1, можно определить как производную

$$\int d\theta_1 f(\theta_1) = \frac{\partial}{\partial\theta_1} f(\theta_1). \tag{2.14}$$

Поскольку функция $f(\theta_1)$ обязательно должна быть линейной функцией своего аргумента θ_1, равенством (2.14) интеграл определяется как коэффициент при θ_1 в выражении для $f(\theta_1)$. При таком определении интегрирование по частям всегда возможно, т.е.

$$\int d\theta_1 \frac{\partial}{\partial\theta_1} f(\theta_1) = 0. \tag{2.15}$$

Таким образом, для инварианта, построенного из D-компоненты плотности лагранжиана $\mathfrak{L}(x, \theta)$, можно написать выражение

$$\int d^4x d^4\theta\, \mathfrak{L}(x, \theta), \tag{2.16}$$

подразумевая интегрирование по θ в смысле равенства (2.14). Но этим не исчерпываются все возможности. Может оказаться, что $\mathfrak{L}(x, \theta)$ имеет киральную часть $\mathfrak{L}_+(x, \theta)$. Такой член не даст вклада в (2.16), потому что его D-компонента, как видно из представления (2.10), есть 4-дивергенция. Из (2.11) следует, что в этом случае при бесконечно малых супертрансляциях F-компонента поля будет изменяться на полную дивергенцию. Следовательно, пространственно-временной интеграл от $\mathfrak{L}_{+F}(x)$ будет инвариантом. Поскольку F-компонента есть коэффициент при $\bar{\theta}_-\theta_+ \sim \theta_+\theta_+$, ее можно найти путем двукратного дифференцирования по θ_+, или, что то же самое, путем двукратного интегрирования. Следовательно, интеграл

$$\int d^4x\, d^2\theta_+ \mathfrak{L}_+(x, \theta) \tag{2.17}$$

является инвариантом. Он обязательно комплексный, но в действительности можно использовать его действительную часть. Этим исчерпываются все возможные инварианты в локальной теории суперполей.

§ 3. Лагранжианы

Для набора киральных суперполей

$$\Phi_+ = \begin{bmatrix} \Phi^1_+ \\ \Phi^2_+ \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Phi^n_+ \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

построить подходящий функционал действия не составляет труда. Достаточно

написать

$$S = \int d^4x\, d^4\theta \quad \Phi_+^\dagger \Phi_+ + (\int d^2x d^2\theta_+ W(\Phi_+) + \text{э. с.}), \tag{3.2}$$

где $W(\Phi_+)$ – полином. (В более общем случае достаточно потребовать, чтобы комплекснозначная функция $W(A_+)$ была аналитической. Показать, что выражение (3.2) приемлемо, можно путем редукции к компонентной форме. Подставив в него разложение (2.10) и выполнив интегрирование по θ, найдем (опустив индекс "+" у скаляров A_+ и F_+)

$$S = \int d^4x \Big[\partial_\mu A^\dagger \partial_\mu A + \bar{\psi}_+ i \hat{\partial} \psi_+ + F^\dagger F + \\ + \Big\{ \frac{\partial W(A)}{\partial A} F + \psi_+^T C^{-1} \frac{\partial^2 W(A)}{\partial A^T \partial A} \psi_+ + \text{э. с.} \Big\} \Big]. \tag{3.3}$$

Скаляры $F(x)$ – это, очевидно, лишние переменные, и их можно исключить. Тогда действие примет вид

$$S = \int d^4x \Big[\partial_\mu A^\dagger \partial_\mu A + \bar{\psi}_+ i \hat{\partial} \psi_+ - \frac{\partial W^*}{\partial A^\dagger} \frac{\partial W}{\partial A} + \\ + \Big\{ \psi_+^T C^{-1} \frac{\partial^2 W}{\partial A^T \partial A} \psi_+ + \text{э. с.} \Big\} \Big], \tag{3.4}$$

т.е. оно описывает взаимодействие набора n скалярных комплексных полей $A(x)$ с киральными спинорами $\psi_+(x)$. Потенциал определяется выражением

$$V(A, A^\dagger) = \frac{\partial W^*}{\partial A^\dagger} \frac{\partial W}{\partial A} \tag{3.5}$$

и явно неотрицателен. В этом можно усмотреть намек на внутренне присущую суперсимметричным теориям устойчивость. Из (3.4) видно, что необходимым условием перенормируемости теории является требование, чтобы функция W была полиномом 3-й степени

$$W(A) = a_i A^i + \frac{1}{2} b_{ij} A^i A^j + \frac{1}{6} C_{ijk} A^i A^j A^k. \tag{3.6}$$

Более детальное исследование показывает, что такая форма является и достаточным условием перенормируемости. Одним из самых замечательных фактов, обнаруживающихся при подобном исследовании, оказывается то, что коэффициенты a, b и c в формуле (3.6) не получают радиационных поправок, даже конечных. Кинетические же члены в (3.4) приобретают логарифмически расходящиеся поправки и требуют перенормировки.

Довольно просто построить модель, обладающую глобальной симметрией. Если Φ_+^i принадлежит представлению некоторой компактной группы ($\subseteq U(n)$), то действие (3.4) будет инвариантным при условии, что $W(A)$ есть инвариант с точностью до фазы. Это накладывает соответствующие ограничения на коэффициенты в формуле (3.6).

Более сложная задача – построение теорий с локальными симметриями. Во-первых, чтобы быть совместными с суперсимметрией, преобразования, локальные по x, должны быть также локальными по θ. Если такая группа преобразований действует на киральные поля Φ_+, то она также должна быть киральной:

$$\Phi_+ \to e^{i\Lambda_+}\Phi_+, \tag{3.7}$$

где $\Lambda_+ = \Lambda_+^\alpha(x, \theta)Q_\alpha$ принадлежит алгебре данной группы симметрии. Чтобы сделать инвариантными кинетические члены в выражении (3.2), произведем замену

$$\int d^4x\, d^4\theta\, \Phi_+^\dagger\Phi_+ \to \int d^4x\, d^4\theta \Phi_+^\dagger e^{2V}\Phi_+,$$

где $V(x, \theta)$ преобразуется согласно формуле

$$e^{2V} \to e^{i\Lambda_+^\dagger} e^{2V} e^{-i\Lambda_+}\ . \tag{3.8}$$

Суперполе $V(x, \theta)$ принадлежит алгебре группы симметрии и действительно, т.е. $V = V^\dagger$. Его иногда называют "суперпотенциалом", так как в нем можно видеть обобшение известных векторных потенциалов в теории Янга – Миллса. Следует иметь в виду, что суперполе V не кирально. Это ясно уже из правила преобразования (3.8), в которое наряду с Λ_+ входит Λ_+^*. В то же время можно использовать свободу в выборе калибровки, чтобы устранить некоторые из компонент (число которых равно числу независимых компонент Λ_+) поля V. Таким путем можно привести V к виду

$$V(x, \theta) = \frac{1}{4}\bar{\theta}i\gamma_\nu\gamma_5\theta V_\nu(x) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\bar{\theta}\theta\bar{\theta}\gamma_5\lambda(x) + \frac{1}{16}(\bar{\theta}\theta)^2 D(x), \tag{3.9}$$

где V_ν, λ и D принадлежат алгебре симметрии и действительны. Вектор $V_\nu(x)$ оказывается обычным потенциалом Янга – Миллса, а $\lambda(x)$ и $D(x)$ – его суперсимметричными партнерами.

Форма (3.9) отвечает специальному выбору калибровки (предложенной Вессом и Зумино), которая минимизирует число компонентных полей. Но она не является явно суперсимметричной. Применение супертрансляций к (3.9) должно сопровождаться калибровочным преобразованием, чтобы восстановилась форма (3.9). При этом компоненты оказываются преобразующи-

мися по правилам

$$\delta V_\nu = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\gamma_\nu\lambda,$$

$$\delta\lambda = \frac{i}{\sqrt{2}}(i\gamma_5 D + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}V_{\mu\nu})\varepsilon, \tag{3.10}$$

$$\delta D = -\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\varepsilon}\hat{\nabla}\gamma_5\lambda,$$

в которых фигурирует ковариантная производная Янга – Миллса

$$V_{\mu\nu} = \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu - i[V_\mu, V_\nu],$$
$$\nabla_\mu\lambda = \partial_\mu\lambda - i[V_\mu, \lambda]. \tag{3.11}$$

Одновременно компоненты материальных полей Φ_+ подвергаются соответствующим преобразованиям под действием супертрансляций в данной калибровке:

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\psi_+,$$

$$\delta\psi_+ = F\varepsilon_+ - i\hat{\nabla}A\varepsilon_-. \tag{3.12}$$

$$\delta F = \bar{\varepsilon}(-i\hat{\nabla}\psi_+ + i\sqrt{2}\lambda_-A),$$

где через λ_- обозначена проекция вектора λ с отрицательной киральностью, а ковариантные производные таковы:

$$\nabla_\mu A = \partial_\mu A - iV_\mu A,$$
$$\nabla_\mu\psi_+ = \partial_\mu\psi_+ - iV_\mu\psi_+. \tag{3.13}$$

Ковариантные производные (3.11) компонентных полей суперпотенциала V содержатся в киральном спинорном суперполе $W_{\alpha+}$, которое определяется как

$$W_{\alpha+} = -\frac{i}{2\sqrt{2}}\bar{D}_+D_-(e^{-2V}D_{\alpha+}e^{2V}) \tag{3.14}$$

и которое, как можно показать на основании (3.8), преобразуется по правилу

$$W_{\alpha+} \to e^{i\Lambda_+}W_{\alpha+}e^{-i\Lambda_+}. \tag{3.15}$$

Это суперполе является киральным как по отношению к внешнему спинорному индексу, так и в смысле зависимости от θ. В калибровке Весса – Зумино (3.9) оно принимает вид

$$W_{\alpha +} = \exp(-\frac{1}{4}\bar{\theta}\hat{\partial}\gamma_5\theta)[\lambda_+(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}(D + \frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}V_{\mu\nu}) + \frac{1}{2}\bar{\theta}_-\theta_+(\frac{1}{i}\hat{\nabla}\lambda_-)]. \tag{3.16}$$

Если W – киральное поле, преобразующееся согласно (3.15), то можно построить инвариант

$$S(V) = \int d^4x\, d^2\theta + \frac{1}{4}\operatorname{tr}(W_+^T C^{-1} W_+) + \text{э.с.} = \int d^4x \operatorname{tr}[-\frac{1}{4}V_{\mu\nu}V_{\mu\nu} + \bar{\lambda}_- i\hat{\nabla}\lambda_- + \frac{1}{2}D^2], \tag{3.17}$$

причем выписанная компонентная форма справедлива только в калибровке Весса – Зумино. Из этого выражения видно, что $V_\mu(x)$ есть потенциал Янга – Миллса, а $\lambda(x)$ – сопровождающий его мультиплет фермионов.

Связь V с материальными полями Φ_+, также все взаимодействия между материальными полями, совместимые с локальной симметрией, определяются инвариантом

$$S(\Phi_+, V) = \int d^4x\, d^4\theta\, \Phi_+^\dagger e^{2V}\Phi_+ + \int d^4x\, d^2\theta_+ W(\Phi_+) + \text{э. с.} = \int d^4x[\nabla_\mu A^\dagger \nabla_\mu A + \bar{\psi}_+ i\hat{\nabla}\psi_+ + F^+F + (i\sqrt{2}A^\dagger\bar{\lambda}_-\psi_+ + \text{э. с.}) + A^\dagger DA + (\frac{\partial W}{\partial A}F + \psi_+^T C^{-1}\frac{\partial^2 W}{\partial A^T\partial A}\psi_+ + \text{э.с.})]. \tag{3.18}$$

Здесь также компонентная форма применима только в калибровке (3.9). Если локальная симметрия содержит фактор $U(1)$, то возможен еще один инвариант:

$$S_\xi(V) = \int d^4x d^4\theta\, \xi \operatorname{tr} V = \int d^4x\, \xi \operatorname{tr} D, \tag{3.19}$$

где ξ – параметр с размерностью массы в квадрате. Этот член важен в моделях со спонтанным нарушением суперсимметрии.

Взятые вместе три выражения (3.17) – (3.19) образуют калибровочно-инвариантный и суперсимметричный функционал действия для материальных и

калибровочных полей. Можно исключить вспомогательные поля F и D, оставив в качестве физических полей A, ψ_+, λ_- и V_ν. Тем самым выявляются основные степени свободы. Но на практике при вычислениях часто удобнее суперсимметричная калибровка и правила Фейнмана, написанные для самих суперполей, а не для компонентных полей.

Данный параграф мы закончим замечанием, что можно связать фермионное квантовое число с преобразованием фазы

$$\theta \to e^{\alpha\gamma_5}\theta. \tag{3.20}$$

Инвариантность будет иметь место, если потребовать, чтобы суперпотенциал $V(x, \theta)$ преобразовывался как скаляр, а материальные поля – согласно формуле

$$\Phi_+(x, \theta) \to e^{i\alpha f}\Phi_+(x, e^{-\alpha\gamma_5}\theta), \tag{3.21}$$

где f – эрмитова матрица, коммутирующая со всеми генераторами симметрий, причем на функцию W наложено условие

$$W(e^{i\alpha f}A) = e^{2i\alpha}W(A). \tag{3.22}$$

Это квантовое число замечательно тем, что позволяет провести различие между членами одного мультиплета; калибровочные симметрии, о которых говорилось выше, не делают такого различия. Все члены супермультиплета принадлежат одному и тому же представлению группы калибровочных симметрий (коммутирующей с супертрансляциями). В случае расширенных суперсимметрий ($N > 1$) фазовая симметрия (3.20) обобщается до $U(N)$.

§ 4. Спонтанное нарушение суперсимметрии

Ненарушенная суперсимметрия, конечно, не может дать адекватного описания наблюдаемого мира. На уровне достижимых в настоящее время энергий нет почти никакого следа такой симметрии. Следовательно, если мы хотим наложить эту симметрию на гипотетическом более глубоком уровне, необходимо предусмотреть возможность ее спонтанного нарушения. Цель данного параграфа – обсудить некоторые общие аспекты явления спонтанного нарушения симметрии и представить простую модель (предложенную О'Рэйферти), в которой суперсимметрия нарушается в древесном приближении.

Важной отличительной особенностью суперсимметричных теорий является то, что энергия основного состояния в них должна равняться нулю, если симметрия не нарушена, и, наоборот, если основное состояние не является инвариантным, то его энергия должна быть отлична от нуля. Это непосредственно вытекает из алгебры. Так, исходя из (1.1в), можно найти, что

$$P_0 = \{Q, Q^\dagger\}. \tag{4.1}$$

Введя полный набор состояний и вычислив вакуумное среднее значение, получим

$$\langle 0|\, P_0 |\, 0 \rangle = \frac{1}{2} \sum_n \sum_\alpha |\, \langle 0 |\, Q_\alpha |\, n \rangle |^2. \qquad (4.2)$$

Если Q_α уничтожает вакуум, то $\langle P_0 \rangle = 0$; в противном случае эта величина отлична от нуля и положительна.

Рассмотрим, например, систему киральных скаляров, описываемую действием (3.4). В древесном приближении плотность энергии основного состояния дается значением потенциала (3.5) в его минимуме. Оно, очевидно, неотрицательно. Если суперсимметрия не нарушена, то это минимальное значение должно быть равно нулю. Следовательно, в случае ненарушенной симметрии должно выполняться соотношение

$$\frac{\partial W(A)}{\partial A} = 0. \qquad (4.3)$$

Если оно не может быть выполнено, то суперсимметрия оказывается спонтанно нарушенной на древесном уровне. Простая модель, иллюстрирующая такую возможность, была построена О'Рэйферти. В ней три суперполя Φ_{0+}, Φ_{1+} и Φ_{2+} и функция W имеет вид

$$W = A_0\left(s + \frac{h}{2} A_1^2\right) + mA_1A_2$$

с произвольными коэффициентами s, h и m. Ясно, что производные

$$\frac{\partial W}{\partial A_0} = s + \frac{h}{2} A_1^2,$$

$$\frac{\partial W}{\partial A_2} = m A_1$$

не могут быть равны нулю одновременно. Следовательно, плотность энергии вакуума отлична от нуля и суперсимметрия нарушена.

Спонтанное нарушение суперсимметрии приводит к появлению голдстоуновской частицы. В этом отношении суперсимметрия подобна любой другой глобальной симметрии. В самом деле, эффект Голдстоуна можно продемонстрировать путем рассуждений, мало отличающихся от обычных. В самом деле, в силу инвариантности действия существует сохраняющийся нетеровский ток $J_{\mu\alpha}(x)$, проинтегрировав который мы получим генераторы

$$Q_\alpha = \int d^3x J_{0\alpha}(x). \qquad (4.4)$$

Вариации $\delta\psi_+$ при бесконечно малых супертрансляциях можно представить в виде

$$\delta\psi_+(0) = i \int d^3x [\psi_+(0), \bar{\varepsilon} J_0(x)]. \tag{4.5}$$

Но, согласно (2.11), $\delta\psi_+ = F\varepsilon_+ - i\, \hat{\partial} A \varepsilon_-$, а потому в вакуумном состоянии мы должны иметь

$$\left\langle F(0) \right\rangle \varepsilon_+ = i \int d^3x \left\langle 0 | [\psi_+(0), \bar{\varepsilon} J_0(x)] | 0 \right\rangle =$$
$$= \frac{1}{i} \int d^4x\, \partial_\mu \left\langle 0 | T(\psi_+(0) \bar{\varepsilon} J_\mu(x)) | 0 \right\rangle . \tag{4.6}$$

В то же время вспомогательное поле F получается при варьировании действия (3.3) по $F^\dagger$, что дает

$$F = -\frac{\partial W^*}{\partial A^\dagger} . \tag{4.7}$$

Но это и есть величина, которая не обращается в нуль в состоянии вакуума, если суперсимметрия спонтанно нарушена. Следовательно, в таких случаях правая часть равенства (4.6) отлична от нуля, а это означает, что двухточечная функция $< 0 | T(\psi_+(0) \bar{\varepsilon} J_\mu(x)) | 0>$ имеет особенность при нулевой массе. Таким образом, мы приходим к заключению, что система содержит безмассовую частицу со спином $1/2$ – голдстоуновский фермион.

Явная форма супертока $J_{\mu\alpha}$, соответствующего действию (3.3), такова:

$$J_{\mu -} = F^\dagger \gamma_\mu \psi_+ + \gamma_\nu \gamma_5 C \psi_+^T i \partial_\nu A = < F^\dagger > \gamma_\mu \psi_+ + \cdots , \tag{4.8}$$

причем в последнем выражении оставлен только линейный член. Пользуясь этим выражением, можно найти комбинацию полей, отвечающую голдстоуновскому фермиону:

$$\nu_+ = < F^\dagger > \psi_+ . \tag{4.9}$$

Одной из удивительных особенностей суперсимметричных теорий является то, что (как установлено с помощью разложений теории возмущений) суперсимметрия не нарушается ни в каком конечном порядке, если она не нарушена на древесном уровне. Это не исключает возможности динамического нарушения суперсимметрии. Данный вопрос был недавно рассмотрен в интересной работе Виттена [3], который установил ряд критериев, позволяющих исключить определенные модели. В таких моделях суперсимметрия должна иметь место и в точных решениях.

Литература[1]

1. *Salam A., Strathdee J.* Fortschr. der Phys. **26**, 57 (1978).
2. *Fayet P., Ferrara S.* Phys. Rep., **32C**, 249 (1977).
3. *Witten E.* Dynamical breaking of supersymmetry, Nucl. Phys., **B185**, 513 (1981).

4*. *Ошевецкий В.И., Мезинческу Л.* Симметрии между бозонами и фермионами и суперполя. – УФН, 1975, т. 117, с. 635.

[1] Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе. – *Прим. ред.*

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБР РАСШИРЕННОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ ТЕОРИИ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Дж. Тейлор*

§ 1. Введение: суперсимметрия и суперполя

А. Что такое суперсимметрия?

Суперсимметрия – это симметрия между бозонами и фермионами. Представление о такой симметрии впервые возникло в дуальной модели рассеяния [24], но она была абстрагирована и рассматривалась как симметрия, не зависящая от модели, Вессом и Зумино в 1974 г. [46] (хотя и рассматривалась еще ранее в оставшейся незамеченной работе Гольфанда и Лихтмана [18]). Были построены различные варианты теории взаимодействующих полей, удовлетворяющие требованию суперсимметрии, при квантовании которых обнаружилось уменьшение расходимостей в ультрафиолетовой области [20, 46]. Подобное же уменьшение расходимостей было обнаружено в низшем нетривиальном приближении в супергравитации [7, 14], суперсимметричном варианте эйнштейновской теории гравитации. Тем самым был открыт возможный путь осмысленного квантования гравитации. Позднее было показано [8, 19, 44], что в силу критерия сокращения ультрафиолетовых расходимостей включение в супергравитацию материальных полей, описывающих лептоны, кварки и глюоны, имеется лишь в так называемых теориях расширенной супергравитации. Такие теории сейчас находятся в центре внимания исследований, и некоторые из них будут изложены здесь и в других статьях книги.

Цель моей лекции – познакомить слушателя с теорией расширенной суперсимметрии, охарактеризовать соответствующий спектр частиц и пояснить, как можно его использовать с наименьшими трудностями. Дело в том, что в максимально расширенных суперсимметричных теориях оказывается очень большим число компонентных полей и его желательно существенно уменьшить.

Чтобы уяснить себе характер затруднений, рассмотрим суперсимметричную теорию, объединяющую действительное скалярное поле A с фермионным полем, описываемым майорановским (действительным) спинором ψ. Поскольку поля A и ψ имеют канонические размерности 1 и 3/2, мы можем определить бесконечно малые вариации δA поля A и $\delta\psi$ поля ψ при преобразованиях суперсимметрии, выразив их через постоянный майорановский параметр ε с размерностью ½:

$$\delta A = \bar{\varepsilon}\psi, \qquad \delta\psi = \frac{1}{2}(\hat{p}\varepsilon)A. \tag{1}$$

**J.C. Taylor*, Кафедра математики, Королевский колледж, Лондон.

Такие преобразования могут порождаться майорановским генератором S_α:

$$\delta A = i[\bar{\varepsilon} S,\ A]_-, \qquad \delta\psi = i[\bar{\varepsilon} S,\ \psi]_- \ . \tag{2}$$

Рассмотрев два последовательных преобразования δ_1 и δ_2 с параметрами ε_1 в ε_2, на основании формул (1) получаем

$$[\delta_2, \delta_1]_- A = \delta_2 \bar{\varepsilon}_1 \psi - \delta_1 \bar{\varepsilon}_2 \psi = \frac{1}{2} (\bar{\varepsilon}_1 \hat{p} \varepsilon_2 - \bar{\varepsilon}_2 \hat{p} \varepsilon_1) A = - \bar{\varepsilon}_2 \hat{p} \varepsilon_1 A =$$
$$= -[\bar{\varepsilon}_2 S,\ \bar{\varepsilon}_1 S] A. \tag{3}$$

Отсюда видно, что в случае антикоммутирующих фермионных параметров ε_1 и ε_2 мы имеем

$$[S_\alpha,\ S_\beta]_+ = - (\hat{p} C^{-1})_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где C – дираковская матрица зарядового сопряжения. Это – основное антикоммутационное соотношение для генераторов суперсимметрии S_α, а пара $(A,\ \psi)$ образует простейший супермультиплет полей со спинами $(0,\ ½)$.

Можно расширить множество генераторов S_α до $S_{\alpha i}$, добавив индекс внутренней симметрии i $(1 \leqslant i \leqslant N)$, и мы получим генераторы $S_{\alpha i}$ с антикоммутатором, взятым в виде тривиального обобщения соотношения (4):

$$[S_{\alpha i},\ S_{\beta j}]_+ = - (\hat{p} C^{-1})_{\alpha\beta} \delta_{ij} \ . \tag{5}$$

Это – основное соотношение N-расширенной алгебры суперсимметрия S_N. Как мы увидим ниже, оно обладает внутренней симметрией $SU(N)$.

Б. Суперполя

Естественным обобщением понятия поля, заданного в пространстве-времени как пространстве представления для генераторов импульса и углового момента P_μ и $J_{\mu\nu}$, будет понятие суперполя [29, 45], заданного в суперпространстве как пространстве представления для генераторов суперсимметрии S_α. Нетрудно убедиться, что если мы введем антикоммутирующие переменные θ_α, такие, что $[\theta_\alpha, \theta_\beta]_+ = 0$ и $\bar{\theta}^\alpha = \eta^{\alpha\beta}\theta_\beta$, где $\eta = - C^{-1}$, и возьмем

$$S_\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^\alpha} + \frac{i}{2} (\hat{\partial}\theta)_\alpha \right) \tag{6}$$

в качестве генераторов, действующих на суперполя $\Phi(x,\ \theta)$, то соотношение (4) будет выполняться. Аналогичным образом можно добавить в формуле (6) к индексу α индекс внутренней симметрии i, тогда мы получим генераторы, удовлетворяющие соотношению (5) для расширенной суперсимметрии.

Чтобы выявить компонентный состав суперполя $\Phi(x, \theta_{\alpha i})$, мы можем разложить по степеням θ; коэффициенты разложения и будут компонентными полями. Вследствие антикоммутативности переменных θ максимально возможное число членов в таком разложении равно 2^{4N}. При $N = 1$ это лишь 16, но при $N = 2$ мы имеем 256, и далее число членов возрастает экспоненциально: 65 536 при $N = 4$; 4 294 967 296 при $N = 8$! Ниже мы увидим, что удовлетворительную теорию расширенной супергравитации можно надеяться получить лишь при $N \leqslant 8$. Совершенно ясно, что мы не сможем справиться со столь большим числом степеней свободы без соответствующей техники. Такую технику и должна нам дать теория представлений расширенных суперсимметрий, оперирующая с расширенными суперполями.

В принципе можно было бы обойтись вообще без суперполей, и, действительно, в супергравитации были достигнуты большие успехи на компонентном уровне. Но суперполя необходимы для того, чтобы максимально эффективно использовать свойственный суперсимметрии механизм уничтожения ультрафиолетовых расходимостей [4, 6, 12]. К тому же существует элегантный геометрический вариант супергравитации с $N = 1$ в суперпространстве [22, 31, 1, 30], и делаются попытки обобщить его на более высокие N [34, 16, 27, 17]. По этим причинам построение теории максимально расширенной супергравитации с $N = 8$ в суперполевой форме рассматривается как конечная цель исследований в данном направлении.

§ 2. Суперaлгебры: классификация и теория представлений

А. Расширенная суперсимметрия и супералгебры

Алгебру суперсимметрии S_1 составляют генераторы суперсимметрии S_α, а также генераторы трансляций P_μ и лоренцевых поворотов $J_{\mu\nu}$ со следующими коммутаторами и антикоммутаторами:

$$[S_\alpha, S_\beta]_+ = (\hat{P}\eta)_{\alpha\beta}, \quad [J_{\mu\nu}, S_\alpha]_- = -\frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu}S)_\alpha,$$

$$[P_\mu, P_\nu]_- = [P_\mu, S_\alpha]_- = 0; \quad [J_{\mu\nu}, P_\lambda]_- = i(\eta_{\nu\lambda}P_\mu - \eta_{\mu\lambda}P_\nu), \tag{7}$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}]_- = i(\eta_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + \ldots),$$

где $\eta^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$; $[\gamma^\mu, \gamma^\nu]_+ = 2\eta^{\mu\nu}$;

$$\sigma_{\mu\nu} = (1/4i)[\gamma_\mu\gamma_\nu]_-.$$

Можно скомбинировать P_μ и $J_{\nu\lambda}$ в алгебру $L_0 = iO(3, 1)$ – неоднородную алгебру Лоренца – и обозначить множество операторов S_α через L_1, так что $\mathcal{S}_1 =$

$= L_0 + L_1$. Тогда мы будем иметь следующие отношения включения:

$$[L_0, L_0]_- \subset L_0; \qquad [L_0, L_1]_- \subset L_1; \qquad [L_1, L_1]_+ \subset L_0. \tag{8}$$

Опуская детали структуры L_0 и L_1, можно ввести супералгебру L как векторное пространство над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ со скобочной операцией [,] вида $L \times L \to L$ и функцией $g(x)$ на L со значениями 0 и 1 (что называется Z_2-градуировкой), так что

$$[x, y] = -(-1)^{g(x)g(y)}[y, x] \qquad \text{(симметрия)},$$

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + (-1)^{g(x)g(y)}[y, [x, z]] \qquad \text{(тождество Якоби)}.$$

Тогда $L_0 = (x : g(x) = 0)$ называется четной частью L, а $L_1 = (x: g(x) = 1)$ – нечетной частью. Если супералгебра L конечномерна, то существуют базисы Q_m и R_α в L_0 и L_1, такие, что выполняются соотношения

$$[Q_m, Q_n]_- = f^p_{mn}Q_p, \qquad [Q_m, R_\alpha]_- = F_{m\alpha}{}^\beta R_\beta, \qquad [R_\alpha, R_\beta]_+ = A^m_{\alpha\beta}Q_m \tag{9}$$

вместе с квадратичными соотношениями, вытекающими из тождеств Якоби. В соответствии с (9) L_0 – алгебра Ли, а L_1 – представление группы L_0.

Б. Классификация супералгебр

В теории представлений важное значение имеет понятие идеала I алгебры L; это некое ее подмножество, удовлетворяющее условию $[I, L] \subset I$. Алгебра L называется простой, если она не содержит нетривиальных идеалов. Простая супералгебра L, для которой L_1 – полностью приводимое представление группы L_0, называется классической супералгеброй Ли; а если L_1 не обладает указанной приводимостью, то L называется супералгеброй типа Картана.

Рассмотрим матричную супералгебру

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

где A, B, C и D – матрицы $m \times m$, $m \times n$, $n \times m$ и $n \times n$. Тогда L_0 будет состоять из матриц вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, а L_1 – из матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$. Известны классические супералгебры Ли четырех типов [21, 25, 15]:

1) $spl(m, n)$: $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$, или

$$s\,tr\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{tr} A - \operatorname{tr} D = 0, \qquad n \neq m, \ m, n \geqslant 1$$

$$L_0 = sl(m) + sl(n) + gl(1);$$

действительная форма – $su(m, n)$;

2) $osp(m, 2p) = D^T G + GD = 0; \quad A^T = -A; \quad B = C^T G,$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1_p \\ -1_p & 0 \end{pmatrix}, \quad m \geqslant 1; \quad L_0 = 0(m) + sp(2p);$$

3) $P(m)$: $m = n, \quad A^T + D = 0; \quad B = B^T; \quad C = -C^T,$

$$\operatorname{tr} A = 0, \quad m \geqslant 3; \quad L_0 = sl(m).$$

Метрика Киллинга $g^{(R)}_{\mu\nu} = str\,(X^R_\mu X^R_\nu) \equiv 0$ для любого представления R, где $X_\mu = \begin{pmatrix} A_\mu & B_\mu \\ C_\mu & D_\mu \end{pmatrix}$ – базис в пространстве матриц $(n+m)\times(n+m)$;

4) $Q(m)$: $m = n, \quad A = D; \quad B = C, \quad \operatorname{tr} B = 0,$

$$L_0 = sl(m); \quad g^{(R)}_{\mu\nu} \equiv 0 \text{ для любого представления } R.$$

Существуют также исключительные типы F_4, G_3, $osp(4, 2; \alpha)$, описание которых можно найти в литературе [21, 25, 15]. Имеется и полная классификация супералгебр типа Картана по типам $W(n)$, $S(n)$, $\bar{S}(n)$, $H(n)$; за дальнейшими подробностями отсылаем читателя к литературе [21, 25, 15].

Известны различные определения полупростоты, которые эквивалентны в случае алгебр Ли, но не эквивалентны в случае супералгебр:

а) $\det g^{\text{прис}}_{\mu\nu} \neq 0$, поэтому L есть прямая сумма простых алгебр ("прис" означает присоединенное представление);

б) все конечномерные представления полностью приводимы, и тогда L – прямая сумма простых алгебр Ли и супералгебр $osp(1, n)$;

в) если I – максимально разрешимый идеал ($I^n = 0$ для некоторого n) супералгебры Ли $\bar{L}$, то алгебра $L = \bar{L}/I$ полупроста. В этом случае L можно представить в виде (возможно, сложной) функции простых супералгебр.

В. Природа расширенных алгебр суперсимметрии

Попытаемся провести этот анализ для алгебры S_1 или в более общем случае S_N [N – расширенная алгебра с $\alpha \to \alpha i$ в формуле (7)]. Начнем с супералгебры

$$osp(1,4) = \begin{pmatrix} 0 & S_\alpha \\ S_\alpha & sp(4) \end{pmatrix},$$

где $sp(4) \sim so(3, 2)$ есть 10-параметрическая группа. Получить $iso(3, 1)$ можно путем сужения. Если обозначить через J_{ab}, $1 \leqslant a$, $b \leqslant 5$, генераторы $so(3, 2)$ и ввести $P_\mu = R^{-1} J_{5\mu}$, то $[P_\mu, P_\nu]_- = -iR^{-2} J_{\mu\nu} \to 0$ при $R \to \infty$. Остальные коммутаторы дают другие соотношения для $[J, P]$ и $[J, J]$ алгебры

$io\ (3,1)$. В более общем случае $osp\ (N, 4) = \begin{pmatrix} o(N) & S_{\alpha i} \\ \bar{S}^{\cdot}_{\alpha i} & sp(4) \end{pmatrix}$ можно сузить до $\mathcal{S}_N$ аналогичным путем.

Будут ли супералгебры $\mathcal{S}_1$ или $\mathcal{S}_N$ после сужения простыми или полупростыми? Мы говорим, что супералгебра Ли L является полупрямой суммой $S_1 \oplus_s S_2$, если $[S_1, L] \subset S_1$, $[S_2, S_2] \subset S_2$ и $L = S_1 + S_2$ как векторное пространство. Тогда $\mathcal{S}_1 = (P_\mu, S_\alpha) \oplus_s (J_{\mu\nu})$, $\mathcal{S}_N = (P_\mu, S_{\alpha i}) \oplus_s (J_{\mu\nu}, o(N))$ и в обоих случаях S_1 – максимально разрешимый идеал алгебры L с $S_1^3 = 0$. Следовательно, алгебра $\mathcal{S}_N$ по приведенным определениям даже не полупроста, но имеет "простую" структуру. В частности, мы увидим, что соответствующие представления в пространстве суперполей удается проанализировать полностью.

Г. Представления супералгебр

Алгебры Ли обладают следующими свойствами: а) любое конечномерное представление полностью приводимо; б) любое неприводимое представление (НП) эквивалентно эрмитову НП; в) НП полностью характеризуются своими высшими весами (собственными значениями максимального множества взаимно коммутирующих генераторов); г) НП полностью характеризуются собственными значениями операторов Казимира. В случае супералгебр Ли (САЛ) свойство "а" верно лишь для $osp\ (1, n)$, свойство "в" – для всех простых САЛ, свойство "г" не всегда верно [например, неверно для $spl\ (2, 1)$], а свойство "б" требует применения суперсопряжения

$$\begin{pmatrix} A^+ & -C^+ \\ B^+ & D^+ \end{pmatrix}.$$

Представления полупрямых сумм алгебр можно получить методом индуцированных представлений Фробениуса, исходя из НП подалгебр; таким способом мы получим не все НП и не только НП. В следующем разделе этот вопрос будет разобран подробно для $\mathcal{S}_N$.

§ 3. Неприводимые представления супералгебры

А. Массивные НП

Если рассмотреть подмногообразие состояний с заданным $P_\mu = p_\mu$, $p^2 > 0$, то в силу соотношения (5) генераторы $S_{\alpha i}$ будут принадлежать алгебре Клиффорда, содержащей 2^{4N} элементов. Существует единственное неприводимое представление этой алгебры матрицами $2^{2N} \times 2^{2N}$, так что НП алгебры $\mathcal{S}_N$ можно построить на 2^{2N}-мерных пространствах представлений алгебры Клиффорда. При комбинировании их с $(2J + 1)$-мерными НП малой группы $so(3)$ при заданном P_μ индуцируются $2^{2N}(2J + 1)$-мерные НП алгебры $\mathcal{S}_N$.

Можно исследовать более подробно 2^{2N}-мерное пространство алгебры Клиффорда, используя представление матриц Дирака с диагональной γ_0:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \quad \eta = i\gamma_2\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_0\eta = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку S_α – майорановы генераторы, мы имеем $S_1^* = -S_4$, $S_2^* = S_3$, так что в системе покоя, где $p_\mu = (m, 0)$, соотношение (5) принимает вид

$$[S_{\alpha i}, S_{\beta j}^*]_+ = m\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}, \qquad [S_{\alpha i}, S_{\beta j}]_+ = [S_{\alpha i}^*, S_{\beta i}^*]_+ = 0, \tag{10}$$
$$(\alpha, \beta) = (1, 2).$$

Таким образом, операторы $S_{\alpha i}^*$ действуют как операторы рождения, а $S_{\alpha i}$ – как операторы уничтожения. Мы можем выбрать вакуумное состояние $|0>$ так, чтобы выполнялось равенство $S_{\alpha i}|0> = 0$ при всех i и α; представление алгебры Клиффорда будут образовывать состояния $(\prod S_{\alpha i}^*)|0>$. Если состояние $|0>$ имеет $so(3)$-спин j, то множество таких состояний будет иметь некий набор спинов, который мы рассмотрим более детально для случаев $N = 1, 2, 4$ и 8.

Б. $N = 1$

В этом случае имеются всего два оператора рождения S_1^* и S_2^*, так что из состояния вакуума $|j, j_3>$, такого, что $S_1|j, j_3> = S_2|j, j_3> = 0$, можно построить 4 состояния $\{|j, j_3>, S_1^*|j, j_3>, S_2^*|j, j_3>, S_1^*S_2^*|j, j_3>\}$. Из соотношения $[J_{\mu\nu}, S_\alpha^*] = -\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}S_\alpha^*$ следует, что $S_1^*|j, -j> \sim |j + \frac{1}{2}, -j - \frac{1}{2}>$ и $S_2^*|j, j> \sim |j + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}>$. Отсюда заключаем, что состояния $|0, 0>$, $S_1^*S_2^*|0, 0>$ имеют спин 0, а $S_1^*|0, 0>$, $S_2^*|0, 0>$ – спин $\frac{1}{2}$. Запишем этот мультиплет как $(0^2, \frac{1}{2})$, обозначив через j^r компонентное поле со спином j и с множественностью r. Состояния с бо́льшими спинами можно построить, умножив $(0^2, \frac{1}{2})$ на состояния со спином j, что дает для любого мультиплета с $N = 1$ спиновый состав $((j - \frac{1}{2}), j^2, (j + \frac{1}{2}))$.

В. $N = 2$

Тем же методом, что и при $N = 1$, находим следующий спиновый состав состояний $\prod S_{\alpha i}^*|0, 0>$:

спин 1: $S^*_{12}S^*_{11}|0,0>$, $S^*_{22}S^*_{21}|0,0>$,

$(S^*_{12}S^*_{21}+S^*_{22}S^*_{11})|0,0>$;

спин ½ : $S^*_{1i}|0,0>$; $S^*_{2i}|0,0>$;

спин 0: $|0,0>$; $S^*_{11}S^*_{21}|0,0>$; $S^*_{12}S^*_{22}|0,0>$,

$(S^*_{12}S^*_{21}-S^*_{22}S^*_{11})|0,0>$, $S^*_{11}S^*_{12}S^*_{21}S^*_{22}|0,0>$,

что дает мультиплет $(0^5, \frac{1}{2}^4, 1)$. Высшие НП получаются, как и раньше, умножением на состояния со спином j, что дает спиновый состав $((j\pm 1)^1, (j\pm \frac{1}{2})^4, j^{5+1})$. Можно также умножать на неприводимые представления $SO(2)$ или $SU(2)$; мы обратимся к случаю внутренней симметрии далее.

Г. $N = 4$ и $N = 8$

Аналогичный анализ при $N = 4$ приводит к фундаментальному мультиплету $(2^1, \frac{3}{2}^8, 1^{27}, \frac{1}{2}^{48}, 0^{42})$, который можно умножать на состояния со спином j и любое НП группы $SO(4)$ или $SU(4)$, чтобы получить высшие НП. Мы видим, что множественность различных спинов в НП при $N = 1, 2$ и 4 дается размерностью НП $[N]_r$ – антисимметричных тензоров ранга r – группы $Sp(2N)$. Так, при $N = 2$ мы имеем $[4]_1 = 4$, $[4]_2 = \frac{1}{2}(4\times 3)-1 = 5$ (где -1 соответствует удалению следа с использованием антисимметричной метрики $Sp(4)$, $[4]_3 = 4$, тогда как при $N = 4$ мы имеем $[8]_1 = 8$, $[8]_2 = \frac{1}{2}(8\times 7)-1 = 27$ $[8]_3 = (1/6)(8\times 7\times 6)-8 = 48$; $[8]_4 = (\frac{1}{4}!)(8\times 7\times 6\times 5)-28 = 42$. Аналогично должно обстоять дело и при $N = 8$, причем фундаментальным НП будет $(4^1, \frac{7}{2}^{16}, 3^{119}, \frac{5}{2}^{544}, 2^{1700}, \frac{3}{2}^{3808}, 1^{6188}, \frac{1}{2}^{7072}, 0^{4862})$, что можно показать в явном виде. Высшие НП тоже получаются взятием прямого произведения этого НП со спином на состояния с пуанкаре-спином j и НП, отвечающие внутренней симметрии.

Д. Внутренняя симметрия и $USp(2N)$

Супералгебра $\mathcal{S}_N$ формулы (7) [с заменой $\alpha \to (\alpha, i)$] инвариантна относительно внутренних поворотов группы $SO(N)$, так что мы можем пополнить $\mathcal{S}_N$ генераторами группы $SO(N)$. Если построить киральные проекции $S_{\alpha\pm i} = \frac{1}{2}\times$ $\times[(1\pm i\gamma_5)S_i]_\alpha$, где $\gamma_5 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, то мы получим

$$[S_{\alpha+i}, S_{\beta+j}]_+ = 0; \quad [S_{\alpha+i}, S_{\beta-j}]_+ = (\hat{P}\eta)_{\alpha+\beta-}\delta_{ij}\,. \tag{11}$$

При преобразованиях группы $U(N)$ вида $S_{\alpha+i} \to U_{ij} S_{\alpha+j}$, $S_{\alpha-i} \to (U^{+})_{i} S_{\alpha-j}$ соотношения (11) не изменяются, так что группу $SO(N)$ как внутреннюю группу симметрии $\mathbb{S}_N$ можно расширить до $U(N)$. Поэтому можно классифицировать компоненты для данного спина в описанных НП алгебры $\mathbb{S}_N$ по НП группы $U(N)$. В самом деле, операторы $S_{\alpha+i}$, $S_{\beta-j}$ можно снова рассматривать [10, 26, 37 – 42] как операторы рождения и уничтожения в системе покоя в представлении матриц γ_μ с диагональной матрицей γ_5. Тогда компоненты с заданным спином мы получим, действуя произведением $(S_{+i} S_{+j})$ (не изменяющим спина) на состояние $\Pi\; S_{\alpha+1} | 0>$. Последнее выбрано как полностью антисимметричное представление группы $SU(N)$ и, следовательно, как симметричное представление оператора спина (действующего на $\alpha +$) с единственным собственным значением $l/2$ (в этом случае l множителей $S_{\alpha+i}$ действуют на $|0>$).

То, что все эти состояния (для данного спина) принадлежат антисимметричному тензорному представлению группы $USp(2N)$, следует [10, 23, 26] из того факта, что матрица $b_{ij} = (\varepsilon^{\alpha+\beta} S_{\alpha+i} S_{\beta+j})$ симметрична по i и j, а матрица $a_{ij} = (S_{\alpha+i} (\sigma_0)^{\alpha+\beta-} S_{\beta-j}) (c\, (\sigma_0)^{\alpha+\beta-} = S^{\alpha+\beta-})$ эрмитова по i и j. Они являются генераторами группы $USp(2N)$, так как любая $2N \times 2N$-матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

будет эрмитовой и симплектической ($A^T G + GA = 0$ при $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$), если $a^+ = a$, $d^+ = d$, $c^+ = b$, $c^+ = c^T$, $b = b^T$, $a = -d^T$. Следовательно, матрица a должна быть эрмитовой, а матрица b – симметричной, и тогда матрица A будет определена правильно. Это условие действительно выполняется для матриц a и b, выраженных через $S_{\alpha i}$, чем и доказывается наличие симметрии $USp(2N)$. Поскольку матрицы a и b, выраженные через $S_{\alpha i}$, не изменяют спина состояния, то можно ожидать, что мы получим классификацию состояний с заданным спином по НП группы $USp(2N)$ (причем a_{ij} на векторе $\prod_{[i]}^{l} S_{\alpha+i} | 0>$, как легко показать, обращается в нуль). Далее, в силу антикоммутативности операторов $S_{\alpha i}$ должны возникать лишь антисимметричные тензорные НП группы $USp(2N)$, что мы и получили.

Максимальный спин Пуанкаре в фундаментальном НП равен $N/2$. Поэтому наибольшее значение N, при котором по крайней мере одно массивное НП алгебры $\mathbb{S}_N$ будет иметь максимальный спин $J = 2$, есть $N = 4$. Стало быть, теории вне массовой оболочки с $N \geqslant 5$ будут содержать спины $J > 2$, а потому неизбежны трудности при введении взаимодействия [2].

3. Е. Безмассовые НП алгебры

В безмассовом случае при $p_\mu = (p, 0, 0, p)$ можно выбрать двухкомпонентный формализм с диагональной матрицей γ_5. Тогда $(\gamma_0 - \gamma_3)\eta =$
$= i\sigma_2\begin{pmatrix} 0 & 1-\sigma_3 \\ 1+\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$, так что $[S_{1i}, S^*_{1j}]_+ = 0, [S_{2i}, S^*_{2j}]_+ = 2p\delta_{ij}$, где

$$S_{\alpha i} = \begin{pmatrix} S_{1i} \\ S_{2i} \\ S^*_{1i} \\ S^*_{2i} \end{pmatrix}.$$

Поэтому можно обойтись без S^*_{1i}, что приведет к уменьшению числа генераторов $S^*_{\alpha i}$ от значения $2N$ для массивного случая до N. Максимальные спины в мультиплетах будут равны половинам соответствующих величин для массивных мультиплетов, и поэтому спины, большие 2, появляются только при $N > 8$.

Поскольку S^*_{2i} понижает спиральность на $\frac{1}{2}$, находим, что при $N = 1$ общее НП имеет спиральности $(\lambda, \lambda - \frac{1}{2})$ в случае полуцелого λ. Если добавить СРТ-сопряженное НП, то будем иметь $(\pm\lambda, \pm(\lambda - \frac{1}{2}))$. При $N > 1$ матрицы b_{ij}, введенные в п. Д, обращаются в нуль, так как каждый член в b_{ij} содержит хотя бы одно S^*_{1i} (где мы полагаем $S_{1+i} = S^*_{1i}$). Поэтому состояния классифицируются только по представлениям группы $SU(N)$ и число состояний с заданной спиральностью для безмассовых НП супералгебры $\mathcal{S}_N$ будет равно числу НП группы $SU(N)$. Таким образом, получим следующий состав спиральностей для НП с максимальной спиральностью 1:

$N = 1$: $(0^2, \pm\frac{1}{2}), (\pm\frac{1}{2}, \pm 1)$;

$N = 2$: $(0^4, \pm\frac{1}{2}{}^2), (0^2, \pm\frac{1}{2}{}^2, \pm 1)$;

$N = 3$: $(0^6, \pm\frac{1}{2}{}^4, \pm 1)$;

$N = 4$: $(0^6, \pm\frac{1}{2}{}^4, \pm 1)$,

тогда как при максимальной спиральности, равной 2, мы имеем НП (выделения НП с единственным состоянием спиральности ± 2)

$N = 1$: $(\pm\frac{3}{2}, \pm 2)$,

$N = 2$: $(\pm 1, \pm\frac{3}{2}{}^2, \pm 2)$,

$N = 3$: $(\pm\frac{1}{2}, \pm 1^3, \pm\frac{3}{2}{}^3, \pm 2)$,

$N = 4$: $(0^2, \pm \frac{1}{2}^4, \pm 1^6, \pm \frac{3}{2}^4, \pm 2)$,

$N = 5$: $(0^{10}, \pm \frac{1}{2}^{11}, \pm 1^{10}, \pm \frac{3}{2}^5, \pm 2)$,

$N = 6$: $(0^{30}, \pm \frac{1}{2}^{26}, \pm 1^{16}, \pm \frac{3}{2}^6, \pm 2)$,

$N = 7$: $(0^{70}, \pm \frac{1}{2}^{56}, \pm 1^{28}, \pm \frac{3}{2}^8, \pm 2)$,

$N = 8$: $(0^{70}, \pm \frac{1}{2}^{56}, \pm 1^{28}, \pm \frac{3}{2}^8, \pm 2)$

(где через $\pm\lambda^r$ обозначено r-кратно вырожденное состояние спиральности λ).

Заметим, что при $N = 1$ и $N = 2$ в супер-янг-миллсовскую теорию на массовой оболочке (с $\lambda_{\text{макс}} = 1$) можно включить материальные мультиплеты, тогда как мультиплеты материи с $N = 3$ и $N = 4$ не существуют. Аналогично супергравитация на массовой оболочке может иметь добавочные мультиплеты материи до $N = 6$ (либо только до $N = 4$, если ограничить материальные мультиплеты максимальной спиральностью 1), но при $N = 7$ и $N = 8$ дополнительные материальные мультиплеты возникать не могут.

§ 4. Суперполя

А. Индуцированные представления

Мы уже отмечали аналогию между $io\,(3, 1)$ и $\mathcal{S}_N$ при введении суперполей. Если говорить подробнее, то имеют место следующие соответствия:
Алгебра Пуанкаре $io\,(3, 1) \leftrightarrow$ супералгебра Пуанкаре $\mathcal{S}_1$:

$$(P_\mu) \oplus_S (J_{\mu\nu}) \leftrightarrow (P_\mu, \mathcal{S}_\alpha) \oplus_S (J_{\mu\nu}).$$

Группа Пуанкаре $IO\,(3, 1) \leftrightarrow$ супергруппа Пуанкаре $\mathcal{S}IO(3, 1)$: $(X^\mu, \Lambda^\nu_\mu) \leftrightarrow$
$\leftrightarrow (X^\mu, \theta^\alpha, \Lambda^\nu_\mu)$,

$$(X, \Lambda) \cdot (Y, \Sigma) = (X + \Lambda Y, \Lambda\Sigma) \leftrightarrow (X, \theta, \Lambda) \cdot (Y, \Psi, \Sigma) =$$

$$= (X + \Lambda Y + \frac{1}{2}\bar{\theta}\gamma^\mu \text{ и } (\Lambda)\psi, \text{ и } (\Lambda)\psi + \theta, \Lambda\Sigma),$$

$$IO(3, 1) = T_4 \oplus_S SO(3, 1) \leftrightarrow \mathcal{S}IO(3, 1) = (T_4, S_4) \oplus_S SO(3, 1).$$

Индуцированные представления группы $IO\,(3, 1)$ мы получим, выбирая элемент $e^{ip^{(0)}t}$ как комплекснозначный гомоморфизм T_4. Малая группа $L_{p^{(0)}}$, соответствующая $p^{(0)}$, далее определяется как множество таких Λ в группе $SO(3, 1)$, что $\Lambda p^{(0)} = p^{(0)}$. Унитарное НП U группы $L_{p^{(0)}}$ индуцирует НП группы $IO\,(3, 1)$ на множестве функций φ, заданных на $IO\,(3, 1)/T_4 \oplus_S L_{p^{(0)}}$. Это фактор-пространство можно рассматривать как множество точек орбит $p^{(0)}$, т.е. как множес-

тво $\{ p = \Lambda_p p^{(0)} \}$. Тогда для $g = (t, \Lambda) \in IO(3.1)$ мы вводим унитарное представление U_g на множестве $\varphi(p)$ как

$$U_g \varphi(p) = e^{ipt} U(R_p) \varphi (\Lambda_p^{-1} p),$$

где $R_p = \Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1} p} \in L_{p^{(0)}}$. Далее P_μ представляется как $i\, \partial/\partial x^\mu$, а $J_{\mu\nu}$ – как $i\,(x^\mu \partial/\partial x^\nu - x^\nu \partial/\partial x^\mu)$ (применительно к скалярам) на множестве фурье-образов функций φ. Так будут получены все НП с $p^2 > 0$ и $O(3)$-спином j.

На основании отмеченной выше аналогии в этой конструкции можно заменить T_4 подалгебров (T_4, S_4) суперьалгебры $\mathcal{S}_1$. Правда, группа (T_4, S_4) не абелева, но, поскольку 4-мерное представление $S_4(S_\alpha)$ единственно при заданном $p^{(0)}$, мы можем заменить в проведенных выше рассуждениях $e^{ip^{(0)}t}$ на $e^{ip^{(0)}t S_4}$, чтобы получить индуцированные НП из $SO(3)$ на множестве функций, заданных на пространстве $SIO(3,1)/(T_4, S_4) \oplus L_{p^{(0)}}$. Это фактор-пространство есть снова R^4, и, следовательно, мы получим НП на множестве функций $\Phi_j(x) S_4$, т.е. те НП, о которых говорилось в § 3.

Чтобы получить суперполя, необходим другой подход. Простейший способ – расширить переменные пространства-времени x до переменных суперпространства (x, θ), как это было сделано в § 1, п. Б. Тогда мы будем рассматривать функции, заданные на фактор-пространстве группового многообразия по $SO(3,1)$; следовательно, искомое расширение пространства-времени в суперпространство будет таким:

$$((T_4) \oplus_s SO(3, 1))/SO(3, 1) \to ((T_4, S_4) \oplus_s SO(3, 1))/SO(3,1).$$

Таким образом, суперполя – это функции $\Phi_j(x, \theta)$, где j – внешний спиновый индекс.

Поскольку суперполя прямо не связаны с индуцированными представлениями, ясно, что они не обязательно реализуют НП суперьалгебры $\mathcal{S}_1$ (или $\mathcal{S}_N$ в расширенном случае). Нашим следующим вопросом будет выяснение содержания НП для заданного суперполя. Мы готовы работать с этими комбинациями НП суперьалгебры $\mathcal{S}_N$, так как они дают основу для геометрического подхода к супергравитации, по крайней мере при $N = 1$ [22, 31, 1, 30].

Б. Ковариантная производная

В начале лекции мы упомянули о трудностях, связанных с "компонентным взрывом": у скалярного суперполя оказывается 2^{4N} компонент. Поэтому имеет смысл анализировать суперполя, рассматривая НП суперьалгебры $\mathcal{S}_N$, поскольку тогда число компонент будет значительно меньше. Более того, мы можем рассматривать эти НП как "строительные блоки" расширенной супер-

гравитации, и в § 6 будет показано, что соединение их воедино – ключевой момент при построении теории супергравитации.

Мы можем анализировать НП, расширив супералгебру $\mathcal{S}_N$ до новой алгебры $\bar{\mathcal{S}}_N$ путем добавления ковариантных производных

$$D_{\alpha i} = \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\alpha i}} - \frac{i}{2} (\hat{\partial}\theta)_{\alpha i}. \tag{12}$$

Прямые вычисления показывают, что $[D_{\alpha i}, S_{\beta j}]_+ = 0$ (поэтому $D_{\alpha i}$ ковариантна относительно алгебры $\mathcal{S}_N$), $[D_{\alpha i}, D_{\beta j}]_+ = (\hat{P}\eta)_{\alpha\beta}\delta_{ij}$. Мы можем налагать условия на суперполя ковариантным образом, пользуясь $D_{\alpha i}$, например $D_{\alpha + i}\Phi = 0$. Такое суперполе может быть (и действительно является) неприводимым представлением супералгебры $\mathcal{S}_N$.

В. Суперспин

Далее мы введем понятие суперспина, который в классификации НП играет ту же роль, что и обычный спин в случае группы Пуанкаре. Оператор суперспина имеет вид [23, 33, 36]

$$C_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}P^\nu J^{\lambda\rho} - \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{N}\bar{S}_l i\gamma_\mu\gamma_5 S_l = W_\mu - \Sigma_\mu, \tag{13}$$

где первый член – вектор Паули – Любанского, а второй – компенсирующий член, выбранный так, что $[C_\mu, S_{\alpha i}]_- = 0$ (поскольку $[W_\mu, S_{\alpha i}]_- = -\frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma}p^\nu(\sigma_{\rho\sigma}S_i)_\alpha$,

$[\Sigma_\mu, S_{\alpha i}]_- = \frac{i}{2}(\bar{p}\gamma_\mu\gamma_5 S_i)_\alpha$ и $\varepsilon^{\mu\nu ab}\sigma_{ab} = -2\sigma^{\mu\nu}\gamma_5$).

Тогда, вводя $C^\perp_\mu = C_\mu - p_\mu p^\nu C_\nu (p^2)^{-1}$, будем иметь $[C^\perp_\mu P_\nu]_- = [C^\perp_\mu S_{\alpha i}] = 0$ и, следовательно, $[C^\perp_\mu)^2$ есть оператор Казимира группы $\mathcal{S}_N$ (коммутирующий со всеми элементами группы $\mathcal{S}_N$).

В системе покоя (при $p^2 > 0$) мы имеем $C^\perp_\mu = (0, \mathbf{C})$, где $\mathbf{C} = m\mathbf{J} - \frac{1}{2} S^+\boldsymbol{\sigma} S$, причем $\mathbf{C}$ удовлетворяет правилам коммутации группы $SU(2)$. Таким образом, путем обычных рассуждений получаем, что $(C^\perp_\mu)^2 = -2\,p^{-2}Y(Y+1)$ для НП в гильбертовом пространстве, где суперспин Y принимает неотрицательные полуцелые значения. Поскольку оператор $\frac{1}{2} S^+\boldsymbol{\sigma} S$ соответствует спину $1/2$, пуанкаре-спин в представлении с заданным будет иметь значения $(Y \pm 1/2,\ Y)$ при $N = 1$ и аналогичные значения при бóльших N.

Г. Операторы Казимира для НП, содержащихся в суперполях

Можно построить НП супералгебры $\mathcal{S}_N$ на базисных векторах $\Pi D_{\alpha+i}\,| >$, где символ $| >$ удовлетворяет условию $D_{\alpha\,-i}\,| > = 0$. Поскольку в системе

покоя $[D_{\alpha i}, C_l]_- = [S_{\alpha i}, J_l]$, значения суперспина на таких базисных векторах будут изменяться в тех же пределах, что и значения спина в данном НП супералгебры $\mathcal{S}_N$. Таким образом, если $|\ >$ имеет спин j, то суперспин на множестве состояний $\{\Pi D_{\alpha+i}|\ >\}$ будет принимать значения $(j + \frac{1}{2}N)$, $(j + \frac{1}{2}N - 1), \ldots, (j - \frac{1}{2}N)$. Мы можем представить $\{\Pi D_{\alpha+i}|\ >\}$ как суперполе $\Phi_j(x, \theta)$ (поскольку каждое состояние соответствует компонентному полю $\Pi D_{\alpha+i}\Phi_j(x, \theta)|_{\theta=0}$). В силу проведенных выше рассуждений множественности различных значений суперспина Y при заданном N будут даваться размерностями антисимметричных тензорных представлений группы $USp(2N)$, а потому значения суперспинов для НП супералгебры $\mathcal{S}_N$ и их множественности будут такими:

$$N = 1: \quad (J = \pm \tfrac{1}{2}, j^2),$$

$$N = 2: \quad (j \pm 1, \quad (j \pm \frac{1}{2})^4, \quad j^{5+1}),$$

$$N = 4: \quad (j \pm 2, \quad (j \pm \frac{3}{2})^8, \quad (j \pm 1)^{27+1}, \quad (j \pm \frac{1}{2})^{48+8}, \quad j^{42+27+1}).$$

Чтобы классифицировать эти НП далее, необходимо большее число операторов Казимира. Можно сказать заранее, что среди них будут операторы Казимира группы $U(N)$, а еще один индекс ассоциируется с разбиением по мультиплетам группы $USp(2N)$ [10, 23, 26, 36]. Первые строятся из генераторов T_{ij} группы $U(N)$, для которых

$$[T_{ij}, S_{\alpha+l}]_- = \delta_{il}S_{\alpha+j}, \qquad [T_{ij}, S_{\alpha-l}]_- = -\delta_{jl}S_{\alpha-i},$$

и дополнительных компенсирующих членов $(p^2)^{-1}\bar{S}_{-i}\, i\hat{p}S_{+j}$:

$$\tau_{ij} = T_{ij} + (p^2)^{-1}S_{-i}\, i\hat{p}S_{+j},$$

так что $[\tau_{ij}, S_{\alpha l}]_- = 0$.

Подходящими $U(N)$-инвариантными операторами для классификации НП супералгебры $\mathcal{S}_N$, содержащихся в данном суперполе, теперь являются операторы Казимира группы $U(N)$. Как показывают прямые выкладки, на множестве суперполей

$$\tau_{ij} = (p^2)^{-1}\bar{D}_{-i}\hat{p}D_{+j} + T_{ij}^{\text{расш}},$$

что и следовало ожидать, поскольку операторы Казимира могут быть построены только из ковариантных производных и операторов группы $U(N)$, действующих на $U(N)$-индексы рассматриваемого поля. Имеется также квадратичный

оператор Казимира группы $Sp(2N)$, вычисление и применение которого мы рассмотрим подробнее только при $N = 2$.

Еще один результат, следующий из этих рассуждений, – очень простая классификация НП супералгебры $\mathcal{S}_N$, содержащихся в суперполе. Они получаются, если взять прямое произведение по спину и квантовым числам $U(N)$-вакуумного состояния (с индексами спина и $U(N)$-суперполя) и произведения $(\prod_p \bar{D}_{i+} \times \times D_{j+}) \prod_{[l]} D_{\alpha+l}$, где второй сомножитель преобразуется по антисимметричному тензорному представлению группы $SU(N)$. Полное НП группы $SU(N)$, порождаемое произведением операторов D, будет описываться схемой Юнга, содержащей столбец из p одиночных клеток и p пар клеток. Собственные значения генератора $U(1)$ (суперзаряда) также существенны; они равны числу операторов $D_{\alpha+}$ в выписанном произведении плюс суперзаряд суперполя.

Таким образом, мы доказали, что $SU(N)$- и спиновый состав фундаментального НП при различных N таков (с обозначением $j^m =$ (спин)$^{\text{размерность НП группы } SU(N)}$:

$$N = 1:\ (0^{1+\bar{1}}, \tfrac{1}{2});$$

$$N = 2:\ (0^{1+3+\bar{1}}, \tfrac{1}{2}^{2+\bar{2}}, 1),$$

$$N = 4:\ (0^{1+10+20'+\overline{10}+1}, \tfrac{1}{2}^{4+20+\overline{20}+\bar{4}}, 1^{6^2+15+6}, \tfrac{3}{2}^{4+\bar{4},2})$$

и таков же набор значений для $U(N)$- и суперспинового состава скалярного суперполя.

Д. Проекторы на НП

Проекторы на некоторые НП, входящие в данное суперполе, можно выписать сразу, если известны собственные значения операторов Казимира для этого НП. Эти проекторы важны при квантовании суперполей, а также при определении компонентного состава НП. Правда, они могут оказаться весьма сложными при больших N, поскольку будут содержать высокие степени D. Дело в том, что если оператор Казимира C имеет значения $\{c_n\}$, то проектор на подпространство с $C = C_{n_0}$, равный $\prod_{n \neq n_0} (C - C_n)/(C_{n_0} - C_n)$, содержит большое число сомножителей. Например, в случае суперспина мы имеем $C = -(C^{\perp})^2/2p^2$ и проектор на НП с $Y = 0$ при $N = 4$ в соответствии с последней строчкой формулы в конце п. Г будет пропорционален $(C - 3/4)(C - 2)(C - 15/4)(C - 6)$. Это произведение содержит до 16 степеней D. Поэтому оказывается затруднительным использовать метод непосредственного построения проекторов для выяснения, например, компонентного состава НП. В связи с этим недавно был предложен ковариантный метод [9, 13], позволяющий рассчитывать проекторы без использования

собственных значений операторов Казимира в явном виде; его изложение здесь, однако, заняло бы слишком много места. Но такие проекторы также содержат высокие степени D_α.

Есть и еще один метод [23], в котором используется только $SO(N)$-инвариантность суперайгебры $\mathcal{S}_N$. В этом случае вычисляются собственные значения операторов, определенных с помощью ковариантных производных. Проекторы, которые возникают при таком методе, оказываются значительно проще, чем полностью ковариантные. Это дает преимущества в некоторых задачах, например при нахождении компонентных полей и их трансформационных свойств. Последние имеют столь же важное значение при общем исследовании супергравитации, как и вопросы ее квантования, а потому ниже мы подробнее остановимся на нековариантном подходе и рассмотрим случаи $N = 1$ и $N = 2$.

Е. Тождества при $N = 1$

Введем тензор C_{ab}, связанный с вектором суперспина C_b из п. В соотношением $C_{ab} = p_{[a} C_{b]}$, так что его квадрат равен $C^2_{ab} = p^2 (C^\perp_a)^2$. В случае скалярного суперполя "внешний" спин равен нулю и можно ожидать, что член в C_a, содержащий S, в комбинации с вектором Паули – Любанского даст $C_{ab} = \frac{1}{2} \bar{D} i p_{[a}\gamma_{b]}\gamma_5 D$. [Это действительно можно показать прямым вычислением на основе формул (6), (7) и (12).] Поэтому находим

$$C_{ab}C^{ab} = \frac{1}{8}\left\{p^2 \bar{D} i\gamma_a\gamma_5 D\bar{D} i\gamma^a\gamma_5 D - p^a p^b \bar{D} i\gamma_a\gamma_5 D\bar{D} i\gamma_b\gamma_5 D\right\}.$$

Теперь воспользуемся тождествами [вытекающими из (12)]

$$\bar{D} i\gamma_a\gamma_5 D\bar{D} i\gamma_b\gamma_5 D = \eta_{ab}(\bar{D}D)^2 + 2i p^c \epsilon_{abcd}\bar{D} i\gamma^d\gamma_5 D - 4(\eta_{ab}p^2 - p_a p_b),$$

$$(\bar{D}D)^3 = 4p^2 \bar{D}D. \tag{14}$$

Мы можем переписать $C_{ab}C^{ab}$ в виде $\frac{3}{4} p^4(A-1)$, где $A = (1/4p^2)(\bar{D}D)^2$ и $A^2 = A$. Поэтому $A = 0$ или $A = 1$, причем при $A = 0$ мы имеем $\frac{3}{4}(1-A) = 3/4$ и, следовательно, $Y = \frac{1}{2}$, а при $A = 1$ мы имеем $Y = 0$. Для мультиплетов в случае $N = 1$, рассмотренных в п. Г, мы знаем, что при $j = 0$ (скалярное суперполе) значения равны $(\frac{1}{2}, 0^2)$, т.е. имеются два НП с $Y = 0$. Их можно различить по значениям $U(1)$-суперзаряда, порождаемого γ_5-преобразованием $\theta \to e^{\alpha\gamma_5}\theta$. Если Γ – инфинитезимальный генератор этого преобразования, т.е. $[S_\alpha, \Gamma]_- = i(\gamma_5 S)_\alpha$, то соответствующий оператор Казимира будет иметь вид

$$G = \Gamma - \frac{1}{2p^2}\bar{S} i\hat{p}\gamma_5 S.$$

В случае скалярного суперполя это выражение переходит в $G = \frac{1}{2} p^2 \bar{D} i \hat{p}\gamma_5 D$ [что можно показать прямым вычислением на основе формул (6) и (7)]. Используя тождества (14), можно легко показать, что $G^2 = A$, так что при $Y = 0$ будем иметь $G = \pm 1$. Следовательно, проектор на эти НП имеет вид

$$\Pi_{Y = 1/2} = (1 - A),$$

$$\Pi_{Y = 0,\ G = \pm 1} = \frac{1}{2} A (1 \pm G) = \frac{1}{2} A \pm \frac{1}{4p^2} \bar{D} i \hat{p}\gamma_5 D. \qquad (15)$$

С помощью преобразования Фирца применительно к произведению трех D можно показать, что для двух последних НП выполняется равенство $D_{\alpha\,\pm}\Pi_{Y = 0, G = \pm 1} = 0$. Поэтому они называются киральными НП, так как решение уравнения $D_{\alpha\,\pm}\Phi(x, \theta) = 0$ может быть записано как функция только $x^\mu - (i/2)\bar{\theta}\gamma_\mu\gamma_5\theta$ и $\theta_{\dot{\alpha}\,\pm}$.

Путем аналогичных вычислений можно найти проекторы для суперполей с высшими спинами [33].

Ж. Тождества при $N = 2$

В случае скалярного суперполя при $N = 2$ мы имеем

$$C_{ab} = \frac{1}{2} \sum_{l=1} \bar{D}_l i p_{[a}\gamma_{b]}\gamma_5 D_l, \text{ так что}$$

$$C_{ab}^2 = \frac{3}{2} p^4 (A_1 + A_2) - 3p^4 + J,$$

где

$$J = \frac{1}{4}\Big\{ p^2 (\bar{D}_1 i \gamma_a \gamma_5 D_1)(\bar{D}_2 i \gamma^a \gamma_5 D_2) - \bar{D}_1 i \hat{p}\gamma_5 D_1 \bar{D}_2 i \hat{p}\gamma_5 D_2 \Big\}.$$

Собственные значения оператора J можно получить из тождеств

$$A_1 J = A_2 J = J A_1 = J A_2 = 0; \qquad J^2 = 2p^4 J + 3p^8 (1 - A_1)(1 - A_2).$$

Для нахождения собственных значений оператора суперзаряда

$$G = \frac{1}{2p^2} \sum_{l=1}^{2} \bar{D}_l i \hat{p}\gamma_5 D_l$$

воспользуемся тождествами $G^2 = A_1 + A_2 + R$,

$$R = \frac{1}{2\,p^2}\,\bar{D}_1 i\,\hat{p}\gamma_5 D_1 \bar{D}_2 i\,\hat{p}\gamma_5 D_2, \qquad R^2 = 16p^8 A_1 A_2,$$

так что $[\,G^2 - 4p^4(A_1 + A_2)]^2 = 64p^8 A_1 A_2$. В результате находим, что $A_1 + A_2 = 0$, $G = 0$; $A_1 + A_2 = 1$, $G = \pm 1$; $A_1 + A_2 = 2$, $G = \pm 2$ или 0. Нам нужны также собственные значения оператора Казимира группы вращений $SO(2)$:

$$J = \frac{1}{p^2}\,\bar{D}_1 i\,\hat{p} D_2, \quad J^2 = 1 - \frac{1}{4p^2}\,W + \frac{1}{4p^4}\,(4J - R),$$

где $W = \bar{D}_1 D_1 \bar{D}_2 D_2 + \bar{D}_1 \gamma_5 D_1 \bar{D}_2 \gamma_5 D_2$,

$W^2 = 32p^4 A_1 A_2 - 8R$. Заметим, что для суперполей высшего спина приводимое представление $USp(4)$, $\mathbf{6} = \mathbf{5} + \mathbf{1}$, можно расщепить квадратичным оператором Казимира группы $USp(4)$, который принимает значения $(\,{}^1\!/\!_4 A + {}^1\!/\!_6 p^4)J + 1/6)$ [23].

Используя эти собственные значения, можно записать проекторы в виде

$$\Pi_{Y=1} = \frac{1}{4}(1 - A_1)(1 - A_2)\left(3 - \frac{J}{p^4}\right), \tag{16}$$

$$\Pi_{Y=0=G=T} = \frac{1}{16p^4}\,(4p^4 A_1 A_2 + p^2 W - R). \tag{17}$$

Первый из них дает мультиплет Вейля (содержащий гравитон) ($\mathbf{2}, \mathbf{3/2^4}, \mathbf{1^6}, \mathbf{1/2^4}, \mathbf{0}$), второй – два мультиплета вспомогательных полей ($1, 1/2^4, 0^5$), которые необходимы для построения теории супергравитации с $N = 2$ в ее минимальной форме [9]. Еще один мультиплет получается, если взять действительную часть НП с $G = \pm 2$, $Y = 0$, причем проектор на состояние ${}^1\!/\!_4\, p^2)\bar{D}_1 D_1 \bar{D}_2 D = F = 1$ равен

$$\Pi_{Y=0,\,F=+1} = A_1 A_2\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R}{4p^4}\right)\,\frac{1}{2}\,(1 + F) =$$

$$= \frac{1}{4}A_1 A_2 + \frac{1}{16p^4}\,R + \frac{1}{16\,p^2}\,(\bar{D}_1 D_1 \bar{D}_2 D_2 - \bar{D}_1 \gamma_5 D_1 \bar{D}_2 \gamma_5 D_2). \tag{18}$$

Формулы (16) –(18) удобны для получения компонентных полей, содержащихся в НП для скалярного суперполя. Аналогичное построение было выполнено и при $N = 4$ [23].

§ 5. Компонентные поля в суперполевых представлениях

А. Базисные функции и компоненты

Пока что мы избегали явного разложения суперполей по степеням θ. Чтобы лучше уяснить себе содержание понятия суперполя, проанализируем теперь компонентный состав НП. Рассмотрим НП с $Y = 0$ при $N = 1$. В качестве про-

ектора на состояние с $G = +1$ можно использовать оператор $(1/p^2)\bar{D}_+ D_+ \bar{D}_- D_-$, который следует применить к скалярному суперполю. Мы можем понимать дифференциальный оператор в n-пространстве $(1/p^2)\bar{D}_- D_- \bar{D}_+ D_+ 1$ (где на 1 действуют только θ-производные, тогда как $\partial/\partial\bar{\theta} \cdot 1 = 0$) как состояние $|>$ кирального НП с $Y = 0$, поскольку $D_{\alpha -}| > = 0$. Более того, поскольку $D_\pm 1 = S_\pm 1$, можно написать $|> = (1/p^2)\bar{S}_+ S_+ \bar{S}_- S_- 1$, так что $S_{\alpha +}| > = 0$, и поэтому $| >$ играет роль вакуумного состояния, с помощью которого можно получить полный набор состояний $| >$, $S_{\alpha -}| >$, $\bar{S}_- S_-| >$ для НП с $Y = 0$. Мы будем обозначать эти состояния, или "базисные функции", через e_+, $u_{\alpha +}$, ω_+; они представляют собой дифференциальные операторы в x-пространстве. Следовательно, можно разложить часть суперполя с $Y = 0$, $G = +1$ по этим базисным функциям:

$$\Pi_{Y=0,\,G=+1}\Phi_j = e_+ A_+(x) + \bar{u}^{\alpha +}\psi_{\alpha +}(x) + \omega_+ B_+(x), \tag{19}$$

где A_+, B_+ – комплексные скаляры, а $\psi_{\alpha +}$ – вейлевский спинор. Такое построение можно распространить и на более высокие Y, приписывая индекс Y как внешнее спиновое число каждому из полей A_+, B_+ и $\psi_{\alpha +}$ и приводя $\psi_{\alpha +, Y}$ к спинам $Y \pm 1/2$. Это дает компонентные поля для всех НП в случае $N = 1$. Конкретно операторы e_+, ω_+ и $\psi_{\alpha +}$ выражаются через $D_\pm$ следующим образом: $e_+ = (1/p^2)\bar{D}_- D_- \bar{D}_+ D_+ 1$, $\omega_+ = 4\bar{D}_- D_- 1$, $u_{\alpha +} = (2/p^2)\bar{D}_- D_- (\hat{p} D_-)_{\alpha +}$, что совпадает с величинами, введенными ранее [43].

Подобным же образом можно действовать и при бóльших N. Вакуумное состояние $| > = (1/p^2)^N \prod_{l=1}^{N} \bar{D}_{-l} D_{-l} \prod_{l=1}^{N} \bar{D}_{+l} D_{+l}\, 1$ для НП с $Y = 0$ является также вакуумом для операторов $S_{\alpha + l}$. Поэтому можно построить полный набор состояний

$$\prod_{r=1}^{p} (\bar{S}_{-l_r} S_{-m_r}) \prod_{[i]}^{n} S_{\alpha - i}\, | >,$$

которые могут быть выражены через дифференциальные операторы в x-пространстве (базисные функции):

$$\left(\frac{1}{p^2}\right)^N \prod_{l=1}^{N} \bar{D}_{-l} D_{-l} \prod_{l=1}^{N} \bar{D}_{+l} D_{+l} \prod_{[i]}^{n} D_{\alpha - i} \prod_{r=1}^{p} (D_{-l_r} D_{-m_r})\, 1 = e^{(+)}_{n,\,p}\,. \tag{20}$$

Заметим, что число $n/2$ есть $SL(2, C)$-спин базисных функций, а числа n и p соответствуют $SU(N)$-схеме Юнга, содержащей один столбец одиночных клеток и p пар клеток. Поэтому для НП с $Y = 0$ любого суперполя с $G = +n$ можно написать разложение:

$$\Phi_+ = \underset{Y=0}{\Pi\Phi} = \sum_{n,p} e^{(+)}_{n,p} \Psi_{n,\,p}. \tag{21}$$

При $N = 1$ имеем $e_{0,0} = e_+$, $e_{1,0} = u_{\alpha +}$, $e_{0,1} = \omega_+$. При $N = 2$ множество $\{e_{n,\,p}\}$ является ковариантным обобщением набора базисных функций, введенных автором ранее [43], и аналогично при $N = 4$ [23]. Компонентные функции, принадлежащие НП суперbegin алгебры $\mathcal{S}_N$ с более высокими индексами Y и $SU(N)$, задаются, как и в случае $N = 1$, указанием дополнительных $SL(2, C)$- и $SU(N)$-индексов у $\psi_{n,p}$ и разложением возникающих в результате произзедений НП групп $SL(2, C)$ и $SU(N)$ по НП.

При четных N можно наложить условие действительности, перемешивающее фундаментальное НП с его комплексно сопряженным, действуя оператором $F = (1/4p^2)^{N/2} \prod_{l=1} \bar{D}_l D_l$ (с $F^2 = 1$) на киральное НП любой киральности (этот оператор изменяет киральность вакуумного состояния). В частности, при $N =$ 2 [26] будем иметь $Fe_+(1)e_+(2) = \omega_-(1)\omega_-(2)$. При произвольном N найдем

$$Fe^{(+)}_{n,\,p} = (4p^2)^{p+n-N/2} \prod_{[i]} (2\hat{p})\, e^{(-)}_{n,\,N-n-p}, \tag{22}$$

где символ $\Pi(2\hat{p})$ означает, что множитель $(2\hat{p})$ действует на каждый $SL(2, C)$-индекс, ассоциируемый с антисимметризованным $SU(N)$-мультииндексом i в $e^{(-)}_{n,\,N-n-p}$. Таким образом, если взять НП $\Phi_+ + \Phi^*_+$, где Φ_+ определяется формулой (21), в которой $\Psi^*_{n,N-n-p} = (4p^2)^{p+n-N/2} (\prod_{[i]} 2\hat{p})^T \Psi_{n,\,p}$,

то для него $F = +1$ и оно будет действительным и неприводимым.

Б. Преобразования суперсимметрии

Преобразования суперсимметрии компонент $\psi_{n,\,p}$ в формуле (21) можно вывести из соответствующих преобразований базисных функций. Мы рассмотрим этот вопрос подробнее при $N = 1$, отсылая читателя к литературе [3], где разбирается более общий случай. В качестве примера рассмотрим НП с $Y = 1/2$, построенное на основе базисных функций

$$\begin{gathered} e_0 = 2(1 - A)1, \quad \omega_\mu = -\frac{1}{p^2}(1 - A)\bar{D}i\gamma_\mu\gamma_5 D1, \\ \bar{u}^\alpha = -\frac{4}{p^2}(1 - A)(\eta\hat{p}D)^\alpha 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Коэффициенты выбраны таким образом, чтобы θ-разложение базисных функ-

ций начиналось с 1, $\frac{1}{4}\ \bar{\theta} i\gamma_\mu\gamma_5\theta$ и $\bar{\theta}^\alpha$. Тогда НП $\Phi_{1/2}$ с $Y = 1/2$ будет иметь вид

$\Phi_{1/2} = e_0 D + \bar{u}^\alpha\psi_\alpha + \omega^\mu A_\mu$.

Преобразование суперсимметрии $\delta_\varepsilon\Phi_{1/2} = i\,\bar{\varepsilon}^\alpha S_\alpha\,\Phi_{1/2}$ определяется действием оператора S_α на базисные функции. Поскольку $[S_\alpha,\ D_\beta]_+ = 0$ и $S_\alpha 1 = -D_\alpha 1$, мы имеем

$$S_\alpha e_0 = -2i\,(1-A)D_\alpha 1 = \frac{i}{2}(\hat{p}u)_\alpha, \tag{24}$$

$$S_\alpha u_\beta = \frac{4i}{p^2}(1-A)(\hat{p}D)_\beta D_\alpha 1. \tag{25}$$

Если воспользоваться тем, что $D_\alpha D_\beta = \frac{1}{2}(\hat{p}\eta)_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\eta_{\alpha\beta}\bar{D}D + \frac{1}{4}(\gamma_5\eta)_{\alpha\beta}\times$ $\times\,\bar{D}\gamma_5 D + \frac{1}{4}\ i\,(\gamma_\nu\gamma_5\eta)_{\alpha\beta}\,\bar{D}i\,\gamma_\nu\gamma_5 D$, то (25) принимает вид $-i\,\eta_{\alpha\beta}e_0 + (\hat{p}\gamma_\nu\gamma_5\eta)_{\beta\alpha}\omega^\nu$. В результате

$$S_\alpha\omega_\mu = -\frac{i}{2}(\gamma'_\mu\gamma_5 u)_\alpha \qquad (\text{где } \gamma'_\mu = \gamma_\mu - p_\mu\hat{p}^{1}p^2). \tag{26}$$

С учетом формул (24) – (26) находим

$$\delta_\varepsilon\Phi_{1/2} = i\,\bar{\varepsilon}^\alpha\left\{\frac{i}{2}(\hat{p}u)_\alpha D - i\,\psi_\alpha e_0 - (\bar{\psi}\hat{p}\gamma_\nu\gamma_5\eta)_\alpha\omega^\nu - \frac{i}{2}(\gamma'_\mu\gamma_5 u)_\alpha A^\mu\right\} =$$

$$= e_0\delta D + \bar{u}^\alpha\delta\psi_\alpha + \omega^\mu\delta A_\mu$$

и, следовательно,

$$\delta D = \bar{\varepsilon}^\alpha\psi_\alpha, \qquad \delta\psi_\alpha = \frac{1}{2}(\hat{p}\varepsilon)_\alpha D + \frac{1}{2}(\gamma_5\gamma'_\mu\varepsilon)_\alpha A, \tag{27}$$

$$\delta A_\mu = i\,(\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\gamma_5\hat{p}\psi).$$

Первые два из этих равенств (без члена с A^μ), как и должно быть, совпадают с соотношениями (1), из которых мы исходили в самом начале.

§ 6. Линеаризованные лагранжианы и вспомогательные поля для теорий супергравитации с $N = 1$ и $N = 2$

А. Линеаризованная теория супергравитации с $N = 1$

При $N = 1$ имеются три мультиплета, содержащие гравитон: с $Y = 3/2$, 2 и 5/2. Последние два из них также содержат поля со спином, бо́льшим 2. Ввиду трудностей, возникающих при попытках построения теорий взаимодействующих

полей для таких спинов [2], а также ввиду того, что частицы с высшими спинами экспериментально не наблюдались (точнее, не наблюдались иначе как составные частицы), мы выбираем одно представление $Y = 3/2$ со спиновым содержанием (2, 3/2, 1). Компонентными полями будут поля ($h_{\mu\nu}$, $\psi_{\mu\alpha}$, A_μ) с обычными дополнительными условиями, выделяющими правильные значения спина: $\partial_\mu A_\mu = 0$; $\partial_\mu \psi_{\mu\alpha} = 0$; $(\gamma^\mu \psi_\mu)_\alpha = 0$; $\partial_\mu h_{\mu\nu} = 0$; $h_{\lambda\lambda} = 0$; $h_{\mu\nu} - h_{\nu\mu} = 0$. Учитывая разную размерность полей со спином 1 и 2 (что связано с наличием двух дополнительных компонент S_α в случае спина 2, которых нет в случае спина 1), лагранжиан для этого мультиплета следует выбрать в виде

$$-A_\mu^2 + \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu \hat{\partial}\psi_\mu - h_{\mu\nu}\Box h_{\mu\nu}. \tag{28}$$

Это – линеаризованный лагранжиан Вейля (с точностью до оператора $\Box^{-1}$ в бозонных членах).

Лагранжиан (28) пока нельзя считать удовлетворительным, поскольку в него входят поля с уже наложенными дифференциальными связями. Для построения теории супергравитации, инвариантной относительно соответствующих калибровочных преобразований, мы должны ввести дополнительные степени свободы. Так, чтобы избавиться от условия связи для векторного поля A_μ, необходимо дополнительно ввести скалярное поле φ. Если написать $A_\mu = (B_\mu - \partial_\mu \Box^{-1} \times \partial_\varphi B_\nu)$, не накладывая дополнительного условия на 4-вектор B_μ, то $-A_\mu^2 - (\partial_\mu \varphi)^2 = -B_\mu^2$, причем $\varphi = \Box^{-1}\partial_\nu B_\nu$. Поскольку кинетический член для φ отрицателен, комбинацию $[-A_\mu^2 - (\partial_\mu \varphi)^2]$ можно компактно записать в виде $\mathbf{1}_A - \mathbf{0}_P$ [индекс A означает вспомогательный (auxiliary) с размерностью L^{-2}, а индекс P – физический (physical) с размерностью L^{-1}]. Так как уравнения для поля B_μ без связей будут иметь вид $B_\mu = 0$, можно ввести правило "аннигиляции" $1_A - 0_P \approx 0$. Можно также ввести правила "рождения" $\mathbf{2}^+_P - \mathbf{0}^+_P = L_{\text{Эйншт}}$, $3/2 - 1/2 = L_{\text{Р.Ш.}}$ (лагранжиан Рариты – Швингера для поля со спином 3/2). Эти правила отвечают нашим требованиям, ибо число степеней свободы поля $h_{\mu\nu}$, инвариантное относительно преобразования координат в смысле линеаризованной теории, равно 6 (т.е. требуется дополнительный скаляр в добавление к "чистому" спину 2), а для поля со спином 3/2, инвариантного относительно преобразований $\delta\psi_{\mu\alpha} = \partial_\mu \varepsilon_\alpha$, число степеней свободы равно 12 (что требует дополнительного введения поля со спином 1/2, помимо "чистого" 3/2). Таким образом, нам нужны дополнительные поля со спинами 0 и 1/2, которые следует скомбинировать с вейлевским лагранжианом. В теории, инвариантной относительно преобразований суперсимметрии, эти поля должны появляться в виде НП супералгебры $\mathcal{S}_1$, обычно называемых мультиплетами вспомогательных полей.

В качестве таких мультиплетов вспомогательных полей возьмем киральные мультиплеты, имеющие состав $(0^+_A, 0^-_P, 1/2^{+i})$ и $(0^-_A, 0^+_P, 1/2^{-i})$ [где знаками "+" и "–" указана четность, соответствующая состояниям, введенным в § 3 в предположении, что проекции $S_\alpha \pm$ имеют четность $\pm i\,(-1)^i$, но с кинетическими

членами, соответствующими отрицательной энергии. Далее можно произвести вычитание:

$$\begin{array}{llll}
2^+_P & \dfrac{3^{\pm i}}{2} & 1^-_A & \\
-(0^+_P & \dfrac{1^{-i}}{2} & & 0^-_A\,) \\
-(& \dfrac{1^{+1/2}}{2} & 0^+_P & 0^+_A\,) \\
\hline
\multicolumn{4}{c}{+h_{\mu\nu}+\psi_{\mu\alpha}+B_m-(S,\ P),} \\
\hline
\end{array}$$

где $h_{\mu\nu}$ и $\psi_{\mu\alpha}$ – гравитон и гравитино супергравитации, а B_m, S и P – вспомогательные поля, обращающиеся в нуль на массовой оболочке [11, 35]. Лагранжиан будет иметь вид

$$L_{Y=3/2}-(L_{Y=0^+}+L_{Y=0^-})=L_{\text{Эйншт}}(h_{\mu\nu})+L_{\text{Р.Ш.}}(\psi_\mu)-(B_m^2+S^2+P^2).$$

Заметим, что можно непосредственно "делинеаризовать" лагранжиан (29) и соответствующие преобразования суперсимметрии для мультиплетов [11, 35]. Суперполевая трактовка этой теории обсуждается в других лекциях, а также в работах [22, 31, 1, 30].

Б. Линеаризованная супергравитация с $N = 2$

Мы действуем так же, как и при $N = 1$, но рассматриваем мультиплет Вейля с $Y = 1$ $(2^+_P,\ 1^{+3}_A,\ 1^+_P,\ 1^-_P,\ 1^-_A,\ 3/2^{\pm i},\ 1/2^{\pm i},\ 0^+_P)$. Поля со спином $1/2$ необходимо сделать вспомогательными, для чего мы воспользуемся новым правилом аннигиляции $1/2-1/2\approx 0$, возникающим из записи $i\,\bar\psi\hat\partial\psi-i\,\varphi\hat\partial\varphi$ в виде $\bar\lambda_1\bar\lambda_2$, где $\lambda_1=\psi+\varphi$, $\lambda_2=i\,\hat\partial(\psi-\varphi)$. Одно из полей 1_P также следует устранить, для чего мы воспользуемся правилом $(1^+_P-1^-_P)\approx 0$, возникающим в соответствии с записью $t_{\mu\nu}=\partial_{[\mu}V_{\nu]}+\varepsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}\partial_\lambda A_\sigma$, так что $t^2_{\mu\nu}=(\partial_{[\mu}V_{\nu]})^2-(\partial_{[\mu}A_{\nu]})^2$. Для таких "аннигиляций" необходимы дополнительные поля со спинами $1/2$ и 1, которые имеются в мультиплете $(1^-_P,\ 1/2^{\pm i2},\ 0^\pm_P,\ 0^\pm_A,\ 0^{-2}_A)$. Как и при $N=1$, можно получить требуемую комбинацию путем вычитания двух мультиплетов с $Y = 0$:

$$\begin{array}{llllllllll}
(2^+_P & 1^{+3}_A & 1^-_P & 1^+_P & 0^+_P & 1^-_A & 3/2^{\pm i2} & 1/2^{\pm i2}) & & \\
(0^+_P & 0^-_P & & 1^-_P & & & & 1/2^{\pm i2} & 0_A^{-2} & 0^+_A) \\
(& 0^{-2}_P & & & 1^-_A & 0^+_P & 1/2^{\pm i2} & & 0^-_A & 0^+_A) \\
\hline
\end{array}$$

$$h_{\mu\nu}+A^3_m+V_\mu+t_{\mu\nu}-B_m+C_m+\psi_{\mu\alpha}+\lambda_1,\quad \lambda_2-(P^3,\ S_1,\ S_2),$$

что дает лагранжиан

$$L_{Y=1} - L_{Y=0} - L_{Y=0} = L_{\text{Эйншт}}(h_{\mu\nu}) + L_{\text{Р.Ш.}}(\psi_{\mu\alpha}) + L_{\text{Максв}}(V_\mu) +$$

$$+ t^2_{\mu\nu} + B^2_m - C^2_m + \bar{\lambda}_1\lambda_2 - P^2 - S^2_1 - S^2_2,$$

где P — триплет группы $SU(2)$. Это минимальный набор вспомогательных полей де Вита и др. [9, 13].

§ 7. Центральные заряды и редукция спина

А. Центральные заряды

Рассмотрим теперь один из возможных методов редукции спина [32], который позволяет построить теорию супергравитации с $N = 8$ без введения полей с большими спинами. Можно расширить алгебру суперсимметрии $\mathcal{S}_N$, добавив в правую часть равенства (5) действительные антисимметричные матрицы

$$[S_{\alpha i}, S_{\beta j}]_+ = (\hat{p}_\eta)_{\alpha\beta}\,\delta_{ij} + \eta_{\alpha\beta} Z_{ij} + (\gamma_5\eta)_{\alpha\beta}\bar{Z}_{ij}. \tag{30}$$

Если матрицы Z и $\bar{Z}$ коммутируют с $S_{\alpha i}$, P_μ и $J_{\mu\nu}$, то их называют центральными зарядами, поскольку они принадлежат центру $\mathcal{S}_N$. Они могут появляться в силу глобальной структуры алгебры [47] или как дополнительные импульсы при размерной редукции [5]. Эта вторая возможность ясна из представления проекций $S_{\alpha i}$, удовлетворяющих равенству (30), на множестве суперполей, возникающих при добавлении члена

$$\tfrac{1}{2}\,\theta_{\alpha j}\,\partial/\partial z^{ij} + \tfrac{1}{2}\,(\gamma_5\theta)_{\alpha j}\partial/\partial\bar{z}^{ij}$$

к выражению (6), где z^{ij} и $\bar{z}^{ij}$ — набор $N(N-1)$ бозе-переменных, от которых должно зависеть суперполе, и $Z_{ij} = \partial/\partial z^{ij}$, $\bar{Z}_{ij} = \partial/\partial\bar{z}^{ij}$ коммутируют со всеми другими генераторами.

При $N = 2$ обе величины Z_{ij} и $\bar{Z}_{ij}$ должны быть пропорциональны ϵ_{ij}. При $N = 4$ можно выбрать Z_{ij} и $\bar{Z}_{ij}$ в виде линейных комбинаций 6 действительных антисимметричных матриц α_{ij}, β_{ij}, которые являются генераторами группы $SO(3) \times SO(3) = SO(4)$, удовлетворяющими соотношениям:

$$[\alpha_i, \alpha_j]_- = -2\epsilon_{ijk}\,\alpha_k; \quad [\alpha_i, \alpha_j]_+ = -2\delta_{ij}.$$

При $N = 8$ можно аналогичным образом выбрать в качестве базиса для Z_{ij} и $\bar{Z}_{ij}$ действительные антисимметричные матричные генераторы группы $SO(8)$.

Б. Редукция спина

Мультиплеты НП расширенной алгебры суперсимметрии $\mathcal{S}_{NZ}$, получающейся в результате замены равенства (5) равенством (30), будут в общем случае иметь такой же спиновый состав, как и в отсутствие центральных зарядов. В одном исключительном случае это не так. Возьмем $\bar{Z}_{ij} = 0$ и запишем правую часть последнего из равенств (23) в виде $(\hat{p} + Z)S$ [43]. Затем представим S

как $V + W$, где $V = (2\hat{p})^{-1}(\hat{p} - Z)S$, $W = (2\hat{p})^{-1}(\hat{p} + Z)S$, так что правила антикоммутации для V и W будут такими:

$$\begin{aligned} &4p^2[V, V]_+ = (p^2 - Z^2)(\hat{p} - Z)_\eta, \\ &4p^4[VW]_+ = (p^2 - Z^2)(\hat{p} + Z)_\eta, \\ &4p^2(W, W) = (p^2 + Z^2)(\hat{p} + Z)_\eta. \end{aligned} \tag{31}$$

Если $p^2 = Z^2$, то член V становится нильпотентным и может быть положен равным нулю в нетривиальном НП. Остается член W, который также удовлетворяет равенству (30). Но, поскольку W подчиняется уравнению Дирака $(\hat{p} - Z)W = 0$, лишь половина компонент члена W независимы. В процесс построения НП, изложенный в § 3 применительно к W, как и должно быть, будет вовлечена ровно половина генераторов W, что и означает редукцию спина наполовину по сравнению с первоначальным значением.

Условие $p^2 = Z^2$ только тогда не будет зависеть от индексов внутренней симметрии (и выполняться для всех НП), когда генератор Z^2 пропорционален единичному оператору. Это возможно только в том случае, если $Z = \sum Z_m \Gamma_m$, где $[\Gamma_m, \Gamma_n]_+ = -2\delta_{mn}$, т.е. Γ_n – это элементы алгебры Клиффорда. При $N = 8$ такая алгебра семимерна, так что имеется не более семи центральных зарядов; при $N = 4$ имеем 3-мерную алгебру. В общем случае условие $p^2 = Z^2$ редуцирует соответствующее безмассовое волновое уравнение в $(4 + l)$ измерениях, где l – размерность алгебры Γ.

Возникающие теперь мультиплеты соответствуют алгебре $\mathcal{S}_{N/2}$ (N четное), но наличие Z_m приводит к "Z-умножению", при котором заданный мультиплет $\mathcal{S}_{N/2}$ умножается на все независимые степени Z_m. При единственном Z_m имеется только одна степень, а следовательно, происходит Z-удвоение. Можно добиться, чтобы так было и в случае, когда имеется большее число генераторов Z_m [43], из чего мы и будем далее исходить. Таким образом, мультиплеты редуцированной по спину алгебры $\mathcal{S}_N$ будут записываться в виде пар НП алгебры $\mathcal{S}_{N/2}$. В результате фундаментальные мультиплеты при $N = 2$, 4 и 8 будут такими:

$$\left(0_A^2, 0_P^2, \frac{1}{2}\right), \quad \left(0_A^5, 0_P^5, \frac{1}{2}^4, 1_A, 1_P\right) \tag{32}$$

$$\text{и} \quad \left(0_A^{42}, 0_P^{42}, \frac{1}{2}^{48}, 1_A^{27}, 1_P^{27}, \frac{3}{2}^8, 2_A, 2_P\right).$$

Здесь взяты индексы, соответствующие НП группы $USp(N)$, что возможно, поскольку любая унитарная матрица U, для которой $U^T Z U = Z$, удовлетворяет алгебре симметрии (30) (при $\bar{Z}_{ij} = 0$). НП, соответствующие более высоким значениям Y и более высоким представлениям группы $USp(N)$, можно получить перемножением компонент (32) и редукцией получающихся прямых произведений представлений групп $SL(2, C)$ и $USp(N)$.

§ 8. Теории супергравитации с $N \geqslant 3$ и центральные заряды

А. Теоремы запрета для теорий вне массовой оболочки

Пока еще не построены модели (ни с компонентными полями, ни с суперполями) для теорий супергравитации с $N \geqslant 3$, которые были бы суперсимметричны и для которых алгебра суперсимметрии замыкалась бы вне массовой оболочки (без использования уравнений движения). Другими словами, пока что оказались неудачными все попытки построить набор вспомогательных полей для теорий супергравитации с $N \geqslant 3$. Недавно с помощью правил рекомбинации полей, введенных в § 7 как правила аннигиляции и рождения, было показано [28, 38], что это не случайно. Рассматривалась произвольная линейная комбинация НП алгебры $\mathcal{S}_3$ в линеаризованном лагранжиане вида $\sum\limits_{Y, n} (a_{Y,n} - b_{Y,n}) \varphi_{Y,n}$, где Y и n – суперспин и изоспин, а $a_{Y,n}$, $b_{Y,n}$ – неотрицательные постоянные. Область изменения Y и n выбиралась соответственно НП, входящим в состав суперполей $(V, V_{\alpha i}, V_m)$ [28] или $(E_A^M, \Omega_{AB}{}^C)$ [38]. Применение правил "аннигиляции" $j - j \approx 0$ при полуцелых j с целью устранения нежелательных фермионных полей с высшими спином и изоспином приводит к тому, что все ферми-поля появляются парами и "аннигилируют" друг с другом. Возможность существования набора вспомогательных полей для теорий супергравитации с $N > 3$ также исключена, поскольку иначе можно было бы получить вспомогательные поля для теории супергравитации с $N = 3$ простой редукцией. Таким образом, удовлетворительные модели супергравитации с $N \geqslant 3$ вне массовой оболочки, по-видимому, невозможно построить[1].

Б. Использование центральных зарядов

В теоремах запрета, о которых говорилось выше, ключевым моментом было предположение об отсутствии центральных зарядов. Это соответствует предположению о тривиальности всех полей в процессе размерной редукции при выводе, например, супергравитации с $N = 8$ в 4-мерном пространстве из простой супергравитации в 11-мерном пространстве [5]. Если же имеются центральные заряды, редуцирующие спин, то такие теоремы запрета несправедливы, поскольку тогда отсутствуют как компоненты с высшими спинами, так и $SU(N)$-симметрия, характерные для алгебры без центральных зарядов. Поэтому можно надеяться построить мультиплеты вспомогательных полей, используя редуцированную симметрию. Было показано, что при всех $N \geqslant 3$ такие мультиплеты существуют [39, 40] и даже совместны с внутренней симметрией $USp(4)$ при $N = 8$ [42]. Эту симметрию можно рассматривать как максимальную, ибо если теория супергравитации есть "окончательная" теория,

---

[1] Обсуждавшиеся выше теоремы запрета относятся только к теориям с конечным числом вспомогательных полей. Однако новейший вариант геометрии суперпространства с $N = 2$ соответствует бесконечному числу компонентных вспомогательных полей (см. ссылку [60] в предисловии). – *Прим. ред.*

объединяющая все силы природы, то ее наибольшая симметрия вне массовой оболочки будет симметрией всех взаимодействий при энергиях выше 10^{19} ГэВ. Появление других симметрий при более низких энергиях – интереснейшая проблема, требующая дальнейшего исследования.

Литература

1. *Bedding S., Downes-Martin S., Taylor J.G.* Annals of Physics **120**, 175 (1979).
2. *Berhends R., deWit B., van Holten J., van Nieuwenhuizen P.* J. Phys., A**13**, 1643 (1980).
3. *Bufton G., Taylor J.G.* "SU(N) – Covariant Basis Function, Components and Supersymmetry Transformations for Extended Supersymmetry, Journ. of Phys.; A, **16**, 321 (1983).
4. *Capper D., Leibbrandt G.* Nucl. Phys., B**85**, 492 (1975).
5. *Cremmer E., Julia B.* Nucl. Phys., B**129**, 141 (1979).
6. *Delbourgo R.*, N. Cim., **25**A, 646 (1975).
7. *Deser S., Zumino B.* Phys. Lett., **62**B, 335 (1976).
8. *Deser S., Kay J., Stelle K.* Phys. Rev. Lett., **38**, 527 (1977).
9. *deWit B., van Holten J.M.*, Nucl. Phys., B**155**, 530 (1979); *deWit B.*, van Proeyen A., Nucl. Phys., B**167**, 186 (1980).
10. *Ferrara S.* Supergravity 81, Cambridge, 1982.
11. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Lett., **74**B, 333 (1978).
12. *Fujikawa F., Lang W.* Nucl. Phys., B**88**, 61 (1975).
13. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Lett. N. Cim., **25**, 79 (1979); Phys.Lett., **85**B, 47 (1979).
14. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* Phys. Rev., D**13**, 3214 (1976).
15. *Freund P.G.O., Kaplansky I.* J. Math. Phys., **16**, 288 (1975).
16. *Cates S.J.* "Towards an Unextended Superfield Formulation of N=2 Supergravity in "Superspace and Supergravity" eds. S. Hawking, M. Rocek, Cambr. Univ. Press (1981).
17. *Gayduk A.V., Romanov V.N., Schwarz A.S.* Comm. Math. Phys., **79**, 501 – 528 (1981).
18. *Гольфанд Ю., Лихтман Е.П.* Письма в ЖЭТФ, 1971, т. 13.
19. *Grisaru M.T., van Nieuwenhuizen P.; Vermaseren J.A.M.* Phys. Rev. Lett., **37**, 1662 (1976).
20. *Illiopolous J., Zumino B.* Nucl. Phys., B**76**, 310 (1974).
21. *Kac V.G.*, Commun. Math. Phys., **53**, 31 (1977).
22. *Ogievetsky V., Sokatchev E.* "The gravitational axial superfield and the formalism of differential geometry" (1975).
23. *Pickup C., Taylor J.G.*, Nucl. Phys., B1**88**, 577 (1981).
24. *Ramond P.* Phys. Rev., D**3**, 2415 (1971).
25. *Rittenberg V.* "A Guide to Lie Superalgebras", talk at the VI Int. Coll. on Group Theoretical Methods in Physics, Tubingen, 1977.
26. *Rittenberg V., Sokatchev E.* "Decomposition of extended superfields into Irreducible Representations of Supersymmetry", Bonn preprint ISSN-0172-8733. Nuclear Physics, B**191**, 445 (1981).

27. *Rivelles V., Taylor J.G.* "Linearised N-2 Superfield Supergravity", J. Phys.: A, **15**, 183 (1982).
28. *Rivelles V., Taylor J.G.* Phys. Lett., **104**B, 131 (1981b).
29. *Salam A., Strathdee J.*, Nucl. Phys., B**76**, 477 (1974): Phys. Rev., D**11**, 1521 (1975).
30. *Schwarz A.S.* Nucl. Phys., B**171**, 154 – 166 (1980).
31. *Siegel W., Gates J.* Nucl. Phys., B**147**, 77 – 104 (1979).
32. *Sohnius M.* Nucl. Phys., B**138**, 109 (1978).
33. *Sokatchev E.* Nucl. Phys., B**99**, 96 – 108 (1975).
34. *Sokatchev E.* "Complex Superspace and prepotentials for N=2 supergravity". In: "Superspace and Supergravity", ed. S. Hawking, M. Roček, Cambr. Univ. Press (1981).
35. *Stelle K., West P.C.* Phys. Lett., **74**B, 336 (1978).
36. *Taylor J.G.* Nucl. Phys., B**169**, 484 (1980a).
37. *Taylor J.G.* "Extended Superfields in linearised supersymmetry and supergravity", in "Superspace and Supergravity", ed. S.Hawking, M. Roček, Cambr. Univ. Press (1981a).
38. *Taylor J.C.* "A No – Go Theorem for Off-Shell Extended Supergravities", J. Phys.: A, **15**, 867 (1981).
39. *Taylor J.G.* "Auxiliary Field Candidates for N = 3, 4, 5 and 6 Supergravities", Phys. Lett., **105**B, 429 (1981).
40. *Taylor J.G.* "Auxiliary Fields for Linearised N = 8 Supergravity", Phys. Lett., **105**B, 434 (1981).
41. *Taylor J.G.* "Off-shell central charges and linearised N = 8 supergravity, King's College preprint (1981).
42. *Taylor J.C.* "The Internal Symmetry of Off-shell Linearised N = 8 Supergravity", Phys. Lett., **107**B, 217 (1981).
43. *Taylor J.G.* Phys. Lett., **94**B, 174 (1980).
44. *van Nieuwenhuizen P., Vermaseren J.A.M.* Phys. Rev., D**16**, 298 (1977).
45. *Волков Д.В., Сорока В.А.* – Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 529.
46. *Wess J., Zumino B.* Nucl. Phys., B**70**, 39 (1974): Phys. Lett., **51**B, 239 (1974).
47. *Witten E., Olive D.* Phys. Lett., **78**B, 97 (1978).

ДИАГРАММЫ ФЕЙНМАНА ДЛЯ СУПЕРПОЛЕЙ

М. Грисару*

Правила Фейнмана для суперполей сформулировали Салам и Стрэтди [19] вскоре после того, как они ввели суперполя [18] для описания суперсимметрии, которую рассматривали Весс и Зумино [25]. Впоследствии была развита суперполевая теория возмущений, которая использовалась во многих работах в середине 70-х годов. Нас с М. Рочеком и У. Зигелем такой подход заинтересовал в плане вычисления β-функции для $O(4)$-теории Янга – Миллса в трехпетлевом приближении. Вскоре мы увидели, что оригинальные правила чересчур громоздки, и нам удалось упростить и модернизировать их так, что они стали пригодны для многопетлевых расчетов [8]. Такого рода вычисления были выполнены в трехпетлевом приближении [1, 2, 9, 10], а также на четырехпетлевом уровне [20] для глобально суперсимметричных теорий; в настоящее время мы разрабатываем технику для аналогичных вычислений в супергравитации [11].

В своих лекциях я попытаюсь изложить технику вычислений, которой мы пользовались до сих пор. Вы увидите, что здесь еще остается поле деятельности для дальнейших усовершенствований и новых приемов. Считаю приятным долгом отметить, что бо́льшая часть из того, о чем я буду говорить, есть результат нашей совместной работы с М. Рочеком и У. Зигелем. Я также использую часть их докладов на Наффилдском семинаре по супергравитации и в Калифорнийском технологическом институте. Наконец, мне очень приятно иметь возможность представить основоположникам метода суперполевых диаграмм их собственное детище повзрослевшим.

§ 1. Определения и обозначения

Мы будем использовать двухкомпонентные антикоммутирующие спиноры с пунктирными и непунктирными индексами в согласии с правилами соответствия

$$\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi \leftrightarrow \psi^{\alpha}; \quad \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\psi \leftrightarrow \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}.$$

Поднятие и опускание индексов осуществляется с помощью тензора

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon_{\gamma\beta} = \delta_{\gamma}^{\alpha},$$

$$\psi_{\alpha} = \psi^{\beta}\varepsilon_{\beta\alpha}, \quad \psi^{\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\psi_{\beta},$$

*M.T. Grisaru, Университет Брандейса, Уолтем, шт. Массачусетс.

и *в точности* таких же правил для пунктирных индексов (в чем можно видеть отличие от соглашения, принятого в других работах). Мы вводим также

$$(\psi)^2 = \psi^\alpha \psi_\alpha, \quad (\bar\psi)^2 = \bar\psi^{\dot\alpha} \bar\psi_{\dot\alpha},$$

$$\psi^\alpha \psi_\beta = \frac{1}{2}\delta^\alpha_\beta (\psi)^2.$$

Тензорные индексы связаны со спинорными индексами соотношениями

$$q_{\alpha\dot\beta} = \sigma_{\alpha\dot\beta}^{a} q_a, \; q_a = \frac{1}{2}\sigma_a^{\alpha\dot\beta} q_{\alpha\dot\beta},$$
$$\sigma^a = (1, \boldsymbol{\sigma}),$$
$$\sigma_{\alpha\dot\alpha}{}^a \sigma_a{}^{\beta\dot\beta} = 2\delta_\alpha^\beta \delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}, \quad \sigma_{\alpha\dot\beta}{}^a \sigma_b{}^{\alpha\dot\beta} = 2\delta_b{}^a,$$

$$\sigma^a_{\alpha\dot\beta} \sigma^{b\,\gamma\dot\beta} \sigma^c_{\gamma\dot\delta} = [\delta^{ab}\sigma^c + \delta^{bc}\sigma^a - \delta^{ac}\sigma^b - i\varepsilon^{abcd}\sigma_d]_{\alpha\dot\delta}.$$

Используется мнимая временная координата (повернутая по Вику), но пространство не является действительно евклидовым. Метрика имеет вид $\eta_{ab} = (1, 1, 1, 1)$, однако $\varepsilon_{0123} = i$. Практически нет необходимости следить за этим: при любом соглашении скалярное произведение определено однозначно, а все наши вычисления ковариантны.

Будут рассматриваться действительные суперполя $V(x, \theta, \bar\theta)$, зависящие от x^a, θ^α, $\bar\theta^{\dot\alpha}$, и киральные суперполя $\varphi(x, \theta, \bar\theta)$, на которые наложена дифференциальная связь: вводятся ковариантные производные

$$D_\alpha = \frac{i}{2}(\partial_\alpha + i\bar\theta^{\dot\alpha}\partial_{\alpha\dot\alpha}),$$

$$\bar D_{\dot\alpha} = -\frac{i}{2}(\partial_{\dot\alpha} + i\theta^\alpha \partial_{\alpha\dot\alpha}),$$

$$\{D_\alpha \bar D_{\dot\alpha}\} = \frac{i}{2}\partial_{\alpha\dot\alpha},$$

и тогда киральные (φ) и антикиральные ($\bar\varphi$) суперполя удовлетворяют уравнениям

$$\bar D_{\dot\alpha}\varphi = 0, \quad D_\alpha \bar\varphi = 0.$$

Спинорные производные определены так, что

$$\partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \partial_{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \delta_{\dot\alpha}^{\dot\beta}.$$

Отметим наличие множителя $i/2$ в определении оператора D. Такое несколько необычное соглашение упрощает некоторые выкладки. Интегрирование вводится согласно соотношению

$$\int d^2\theta\theta^2 = 1, \text{ т.е. } \int d^2\theta = -\frac{1}{4}\partial^\alpha\partial_\alpha.$$

Отметим, что для интегралов по полному суперпространству $(i/2)\partial^\alpha = D^\alpha$, поскольку данная разность представляет собой полную производную. Таким образом,

$$\int d^4x d^4\theta = \int d^4x d^2\theta \bar D^2 = \int d^4x D^2 \bar D^2.$$

Дельта-функция вводится в соответствии с равенствами

$$\int d^4\theta\delta(\theta - \theta')f(\theta) = f(\theta'),$$

$$\int D^2\bar{D}^2\delta^4(\theta - \theta')|_{\theta=\theta'} = 1.$$

Последнее соотношение нам очень пригодится.

Действие будем записывать в виде

$$\int d^4x d^4\theta \mathcal{L}[V, \varphi, \bar{\varphi}]$$

с тем исключением, что для чисто киральных членов используется мера $d^2\theta$, для чисто антикиральных – мера $d^2\bar{\theta}$. Но такие члены всегда можно переписать, используя полную меру в суперпространстве. В самом деле, если V есть суперполе общего вида, то величина D^2V антикиральна, а величина $\bar{D}^2V$ киральна, а если суперполе $\varphi(\bar{\varphi})$ кирально (антикирально), то мы имеем

$$\bar{D}^2D^2\varphi = \Box\varphi(D^2\bar{D}^2\bar{\varphi} = \Box\bar{\varphi}).$$

Поэтому мы будем, например, иметь

$$\int d^4x d^2\theta(\varphi)^n(\bar{D}^2V)^m = \int d^4x d^2\theta \frac{\bar{D}^2D^2}{\Box}\varphi\,(\varphi)^{n-1}(\bar{D}^2V)^m =$$

$$= \int d^4x d^4\theta\left(\frac{D^2}{\Box}\varphi\right)(\varphi)^{n-1}(\bar{D}^2V)^m.$$

И наконец, нужно определить функциональные производные. В случае суперполя общего вида (без связей) мы вводим

$$\frac{\delta}{\delta V(x, \theta)}\int d^4x' d^4\theta' \mathcal{F}(V) = \mathcal{F}'(V(x, \Theta)),$$

т.е.

$$\frac{\delta V(x', \theta')}{\delta V(x, \theta)} = \delta^4(x - x')\delta^4(\theta - \theta').$$

В случае же кирального суперполя, если положить

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x, \theta)}\int d^4x' d^2\theta' \mathcal{F}(\varphi) = \frac{\delta}{\delta\varphi}\int d^4x' d^4\theta' \frac{D^2}{\Box}\mathcal{F}(\varphi) = \mathcal{F}'(\varphi(x, \theta)),$$

то будет естественным ввести киральную дельта-функцию на основе соотношения

$$\frac{\delta\varphi(x', \theta')}{\delta\varphi(x, \theta)} = \bar{D}^2\delta^4(x - x')\delta^4(\theta - \theta'),$$

например:

$$\frac{\delta}{\delta\varphi}\int d^4x' d^2\theta' (\varphi)^n = n\int d^4x' d^2\theta' (\varphi)^{n-1}\ \frac{\delta\varphi(\theta')}{\delta\varphi(\theta)} =$$

$$= n\int d^4\theta[\bar{D}^2\delta^4(\theta-\theta')]\ \frac{D^2}{\Box}\varphi^{n-1} =$$

$$= n\int d^4\theta\,\delta^4(\theta-\theta')\ \frac{\bar{D}^2D^2}{\Box}\ \varphi^{n-1} = n(\varphi)^{n-1}.$$

Закончим следующими значениями:

а) мы будем также использовать суперполя с лоренцевыми индексами: $\Psi_\alpha(x, \theta, \bar\theta)$, $H_a(x, \theta, \bar\theta)$ и т.д.;

б) следующие операторы являются проекторами:

$$\pi_+ = \frac{\bar{D}^2D^2}{\Box}, \quad \pi_- = \frac{D^2\bar{D}^2}{\Box}, \quad \pi_{1/2} = -2\ \frac{D^\alpha D^{-2}D_\alpha}{\Box};$$

в) хотя нам нигде не понадобятся явные выражения, полезно иметь в виду, что суперполе общего вида дается выражением

$$V = C(x) + \theta^\alpha\chi_\alpha(x) + \bar\theta^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha}(x) + \theta^2 M + \bar\theta^2\bar{M} +$$

$$+ \bar\theta^2\theta^\alpha\psi_\alpha + \theta^2\bar\theta^\alpha\psi_{\dot\alpha} + \theta^2\bar\theta^2 D$$

и что киральное суперполе может быть записано как

$$\varphi(x, \theta, \bar\theta) = e^U\varphi(x, \theta);\ \bar\varphi(x, \theta, \bar\theta) = e^{-U}\bar\varphi(x, \theta),$$

$$U = i\theta^\alpha\sigma^a{}_{\alpha\dot\beta}\bar\theta^{\dot\beta}\partial_a.$$

Используемые ниже интегралы определены в (эрмитовом) "векторном" представлении, в котором поле имеет вышеприведенную форму, однако эти интегралы инвариантны относительно перехода к "киральному" или "антикиральному" представлению, например:

$$\int d^4x\,d^4\theta\,\mathcal{L}(\varphi, \varphi, V) = \int d^4x\,d^4\theta\,e^{-U}\mathcal{L}(\varphi, \bar\varphi, V) =$$

$$\int d^4x\,d^4\theta\,\mathcal{L}\ (e^{-U}\varphi, e^{-U}\varphi, e^U V) = \int d^4x\,d^4\theta\,\mathcal{L}(\varphi, e^{-2U}\bar\varphi, e^{-U}V).$$

В последнем выражении φ зависит только от θ, а $\bar\varphi$ – только от $\bar\theta$.

§ 2. Вывод правил Фейнмана

Рассмотрим сначала производяший функционал $Z(J)$ для суперполя общего вида:

$$Z(J) = \int\mathcal{D}V\exp\int d^4x\,d^4\theta[\frac{1}{2}VKV + \mathcal{L}_{вз}(V) + JV],$$

где K – некоторый (кинетический) оператор. Данное выражение можно переписать в виде

$$Z(J) = \exp\int d^4x\, d^4\theta\, \mathcal{L}_{\text{вз}}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)\left\{\int \mathcal{D}V \exp\int d^4x\, d^4\theta\left[\frac{1}{2} VKV + JV\right]\right\} =$$

$$= \exp\int d^4x\, d^4\theta\, \mathcal{L}_{\text{вз}}\left(\frac{\delta}{\delta J}\right)\left\{\exp\int d^4x\, d^4\theta\left[-\frac{1}{2}JK^{-1}J\right]\right\},$$

вычислив гауссов интеграл обычным способом. Такое представление немедленно приводит к правилам Фейнмана; например, при $K = \square$ будем иметь

а) пропагатор $\langle TV(x,\theta)V(x',\theta')\rangle \longleftrightarrow -(1/p^2)\delta^4(\theta-\theta')$;

б) вершины: для $\mathcal{L}_{\text{вз}} \sim V^n$ будет n линий в каждой вершине и интегрирование по $d^4\theta$ в каждой вершине;

в) для каждой замкнутой петли – интеграл $\int d^4q/(2\pi)^4$ и общий множитель $(2\pi)^2\delta(\Sigma k_{\text{внешн}})$.

Оказывается удобным вычислять эффективное действие $\Gamma(V)$, определяемое одночастичными неприводимыми графиками, при этом

г) каждой внешней линии с выходящим импульсом k сопоставляется множитель $\int d^4k/(2\pi)^4\, V(-k,\theta)$.

Наконец, могут быть также множители, связанные с симметриями.

Киральные поля обычно описываются квадратичным действием вида

$$\int d^4x\left[\int d^4\theta\,\bar\varphi\varphi - \frac{1}{2} m\int d^2\theta\,\varphi^2 - \frac{1}{2} m\int d^2\bar\theta\,\bar\varphi^2\right] =$$

$$= \int d^4x\, d^4\theta\left[\bar\varphi\varphi - \frac{1}{2} m\bar\varphi\,\frac{D^2}{\square}\,\varphi - \frac{1}{2} m\bar\varphi\,\frac{\bar D^2}{\square}\,\bar\varphi\right]$$

с источником

$$\int d^4x\left[\int d^2\theta\, J\varphi + \int d^2\bar\theta\,\bar J\bar\varphi\right] = \int d^4x\, d^4\theta\left[\varphi\,\frac{D^2}{\square}\,J + \bar\varphi\,\frac{\bar D^2}{\square}\,\bar J\right].$$

Гауссов интеграл будет содержать выражение

$$\int \mathcal{D}\varphi\,\mathcal{D}\bar\varphi \exp\int d^4x\, d^4\theta\left[\frac{1}{2}(\varphi\ \bar\varphi)\begin{pmatrix} -\dfrac{mJ^2}{\square} & 1 \\ 1 & -\dfrac{m\bar D^2}{\square}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \bar\varphi\end{pmatrix} + (\varphi\ \bar\varphi)\begin{pmatrix}\dfrac{D^2}{\square}J\\ \dfrac{\bar D^2}{\square}\bar J\end{pmatrix}\right]$$

в котором матрица K имеет обратную матрицу

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{m\bar D^2}{\square - m^2} & 1 + m\dfrac{D^2\bar D^2}{\square(\square - m^2)} \\ 1 + m\dfrac{D^2\bar D^2}{\square(\square - m^2)} & \dfrac{mD^2}{\square - m^2}\end{pmatrix},$$

что приводит к производяшему функционалу

$$Z(J) = \exp \int d^4x\, d^4\theta\, \mathcal{L}_{вз}\left(\frac{\delta}{\delta J}, \frac{\delta}{\delta \bar{J}}\right) \exp \int d^4\theta\, d^4x$$

$$\left[-\bar{J}\frac{1}{\Box - m^2} J + \frac{1}{2}\left(J \frac{mD^2}{\Box(\Box - m^2)} + J + э.с. \right)\right].$$

Отсюда следуют правила Фейнмана:

а) пропагаторы $< T\varphi\,\varphi >: \ \dfrac{1}{p^2 + m^2}\,\delta^4(\theta - \theta'),$

$$< T\varphi\,\varphi >: \ \frac{mD^2}{p^2(p^2 + m^2)}\,\delta^4(\theta - \theta'),$$

$$< T\bar{\varphi}\,\bar{\varphi} >: \ \frac{m\bar{D}^2}{p^2(p^2 + m^2)}\,\delta^4(\theta - \theta');$$

в частности, для безмассовых киральных полей имеются только пропагаторы $\varphi\bar{\varphi}$;

б) поскольку

$$\frac{\delta J(x,\theta)}{\delta J(x',\theta')} = \bar{D}^2\delta^4(x - x')\delta^4(\theta - \theta'),$$

в вершинах для каждого кирального (антикирального) поля, участвуюшего во взаимодействии, имеется множитель $\bar{D}^2$ (D^2), действующий на пропагатор. Но в случае чисто киральной вершины, например $\int d^2\theta\,\varphi^n$, один из них можно использовать для преобразования интеграла $\int d^2\theta$ в интеграл $\int d^4\theta$, что мы всегда будем выполнять. Следовательно, в таких вершинах можно опустить один множитель $\bar{D}^2$. В остальном правила те же, что и для суперполя общего вида.

Примеры.

1. Суперполе обшего вида с взаимодействием, не содержащим спинорных производных:

$$S(V) = \int d^4x\ \ d^4\theta\left[\frac{1}{2} V\Box V + \frac{\lambda}{n!} V^n\right].$$

Рассмотрим петлю, показанную на рис. 1. Пропагаторы дают множители

$$\delta^4(\theta_1 - \theta_2)\delta^4(\theta_2 - \theta_3)\ldots\delta^4(\theta_m - \theta_1),$$

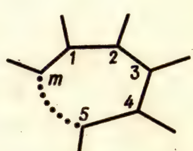


Рис. 1

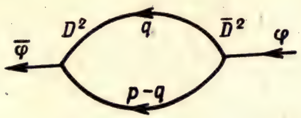


Рис. 2

и это произведение обращается в нуль, поскольку $\delta^4(\theta)\delta^4(\theta) = (\theta^2\bar{\theta}^2)(\theta^2\bar{\theta}^2) = 0.$ Следовательно, теория, описываемая действием указанного вида, не будет иметь квантовых поправок. Это, разумеется, неполноценная теория с духовыми компонентными полями, которые в точности сокращают вклад физических компонентных полей. Но отсюда можно извлечь урок: необходимы спинорные производные чтобы сократить часть θ-факторов, возникающих из δ-функций.

2. Модель Весса – Зумино:

$$S(\varphi, \bar{\varphi}) = \int d^4x \left[\int d^4\theta \; \bar{\varphi}\varphi + \frac{\lambda}{3!} \int d^2\theta \, \varphi^3 + \frac{\lambda}{3!} \int d^2\bar{\theta} \, \bar{\varphi}^3 \right].$$

Рассмотрим для простоты безмассовый случай. Однопетлевой вклад в собственную энергию в соответствии с рис. 2 равен

$$\frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^8} d^4q \, d^4\theta_1 d^4\theta_2 \bar{\varphi}(-p, \theta_1) \varphi(p, \theta_2) D_1^2 \frac{\delta^4(\theta_1 - \theta_2)}{q^2} \bar{D}^2 \frac{\delta^4(\theta_1 - \theta_1)}{(p-q)^2}$$

Так как вершины киральные, операторы D^2 и $\bar{D}^2$ действуют только на одну линию. Поскольку применимо обычное правило интегрирования по частям, эти операторы можно перебросить на другую линию. Заметим также, что в пространстве импульсов

$$\{D_\alpha, \bar{D}_{\dot{\alpha}}\} = \frac{1}{2} p_{\alpha\dot{\alpha}},$$

где p – импульс внутренней линии, ***выходящей*** из конца, в котором действуют операторы D. Кроме того, $D_\alpha(q, \theta_1)\delta^4(\theta_1 - \theta_2) = -D_\alpha(-q, \theta_2)\delta^4(\theta_1 - \theta_2)$, что мы будем называть операцией "переноса". Хотя мы обычно не указываем зависимость D или δ-функций от импульсов, она подразумевается в данном смысле.

Воспользуемся теперь следующими правилами, относящимися к произведениям двух δ-функций в θ-пространстве:

$$\delta_{12}\delta_{21} = 0,$$

$$\delta_{12} D \delta_{21} = \delta_{12} D^2 \delta_{21} = \delta_{12} \bar{D} D^2 \delta_{21} = \delta_{12} \bar{D}^2 \delta_{21} = \delta_{12} D \delta_{21} = 0,$$

$$\delta_{12} D^2 \bar{D} \delta_{21} = \delta_{12} \bar{D}^2 D^2 \delta_{21} = \delta_{12} D^\alpha \bar{D}^2 D_\alpha \delta_{21} = \delta_{12}.$$

Если имеется большое число сомножителей D и $\bar{D}$, то произведения сводятся к данному виду на основании антикоммутационных соотношений и равенств $(D)^3 = (\bar{D})^3 = 0$. В результате выписанный выше интеграл дает выражение для

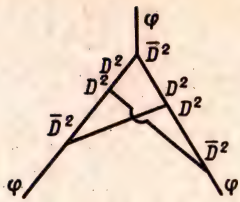


Рис. 3

двухчастичного однопетлевого эффективного действия, ***локальное по*** θ.

$$\frac{\lambda^2}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,d^4\theta\,\bar\varphi(-p,\theta)\,\varphi(p,\theta)\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{q^2(q-p)^2}\ .$$

В безмассовом случае однопетлевая трехточечная функция равна нулю. Трехпетлевое выражение описывается графиком рис. 3, где указаны множители $\bar D$ и внешние поля. Здесь учтено, что в каждой киральной вершине $\int d^2\theta\ \varphi^3$ нужно опустить множитель $\bar D^2$, и то же самое относится к антикиральным вершинам. Вычисление подобной диаграммы – очень хорошее упражнение, и мы проведем его подробнее.

Основная идея состоит в использовании петель, в линиях которых действуют операторы D и $\bar D$. Путем интегрирования по частям и переносов в одной из линий можно освободиться от операторов D, после чего с помощью функции $\delta^4(\theta-\theta')$ (без действующих на нее операторов D) вычисляется интеграл по θ. Этим лишь устанавливается равенство $\bar\theta=\theta'$, т.е. линия сжимается в точку. Далее такую процедуру повторяем до тех пор, пока не останутся две линии, одна из которых не содержит D:

$$\delta_{ij}D\ldots\bar D\ldots D\delta_{ji}\ .$$

В силу приведенных выше правил эта величина будет равна нулю, если только с помощью антикоммутационных соотношений не удастся привести множители к виду $D^2\bar D^2$, $\bar D^2D^2$ или $D^\alpha\bar D^2D_\alpha$. Если же это удастся сделать, то $\delta_{ij}\,D^2\bar D^2\delta_{ji}=\delta_{ij}$ и можно взять еще один интеграл по θ, в результате чего вся петля стягивается в точку в θ-пространстве. Такую процедуру повторяем петля за петлей до тех пор, пока заданный n-петлевой интеграл не сведется к отдельной точке в θ-пространстве. Метод можно проиллюстрировать также на примере диаграмм в теории $\lambda\varphi^3$. Используем соотношение $D^2\bar D^2D^2=q^2D^2$, обозначая данный множитель квадратиком на линии. Линии, не содержащие D, следует считать стянутыми в точку (рис. 4).

В общем случае для проведения вычислений требуются значительные усилия и известная изобретательность, чтобы отыскать более короткие пути. Например, трехточечную функцию, представленную на рис. 3, можно упростить,

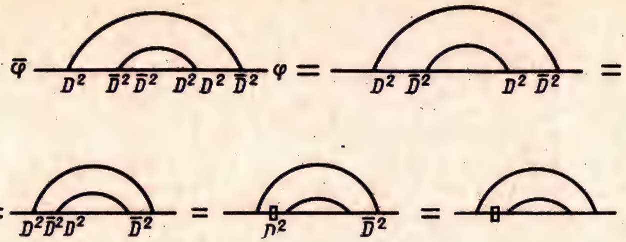


Рис. 4

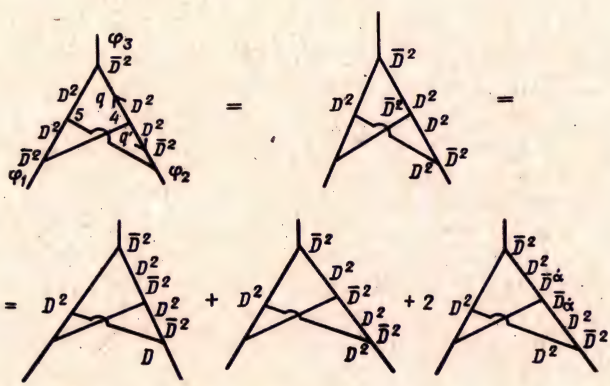
как показано на рис. 5. После интегрирования по частям и переноса множитель D^2 в центральной линии можно проинтегрировать по частям, что дает три члена. Первые два просты: $\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = q^2 \bar{D}^2$ и $\bar{D}^2 D^2 \bar{D}^2 = q'^2 \bar{D}^2$. На первой диаграмме, поскольку мы должны иметь в каждой петле только $D^2\bar{D}^2$, оператор D^2 в нижней линии можно проинтегрировать по частям так, чтобы он действовал лишь на внешнюю линию. Точно так же на второй диаграмме D^2 слева можно перенести на верхнюю внешнюю линию. На третьей диаграмме следует "расщепить" каждый множитель D^2, чтобы (в силу антикоммутации) "поглотились" множители $\bar{D}_{\dot\alpha}$; например, в нижней части справа будем иметь

$$D^2[\varphi_2 \bar{D}^2 D^2 \delta_{24} \bar{D}_{\dot\alpha}] = 2 D^\alpha \varphi_2 D_\alpha \bar{D}^2 D^2 \delta_{24} \bar{D}_{\dot\alpha} =$$

$$= -2 D^\alpha \varphi_2 D_\alpha \bar{D}^2 D^2 \bar{D}_{\dot\alpha} \delta_{24} = -D^\alpha \varphi_2 q'_{\alpha\dot\alpha} \bar{D}^2 D^2 \delta_{24}.$$

Окончательное выражение (помимо пропагаторов и т.п.) таково:

$$q^2 \varphi_1 D^2 \varphi_2 \varphi_3 + q'^2 \varphi_1 \varphi_2 D^2 \varphi_3 - 2\varphi_1 D^\alpha \varphi_2 D^\beta \varphi_3 q'^{\dot\alpha}_{\alpha} q_{\beta\dot\alpha}.$$



Подчеркиваем, что перед последним членом стоит знак минус. Дело в том, что мы исходили из выражения $D^2D^2\bar{D}^2 = D^\alpha D_\alpha D^\beta D_\beta \bar{D}^{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\alpha}$, но в выражении, приведенном выше, был изменен порядок некоторых спинорных индексов, а это привело к изменению знака. Таким образом, мы можем *полностью забывать о том, что операторы D антикоммутируют, и фиксировать правильный знак в самом конце вычислений*. Но нужно учитывать также направление импульса q. Здесь оно согласуется с тем, что первый множитель D^2 действует в вершине 4.

В заключение скажем несколько слов о регуляризации. Мы рассматриваем интегралы по импульсам в n-мерном пространстве, например $\int d^nq\,(2\pi)^{-n}$, тогда как алгебраические преобразования с операторами D выполняются в 4 измерениях. Если иметь в виду продолжение к $n < 4$, то это соответствует схеме размерной редукции Зигеля [21].

А. Калибровочные теории

Рассмотрим обычный случай (не) абелева действительного калибровочного суперполя (векторного мультиплета) [3, 4, 18] $V(x, \theta, \bar\theta)$ с калибровочной симметрией

$e^V = e^{i\bar\Lambda}e^Ve^{-i\Lambda}, \quad \bar{D}\Lambda = D\bar\Lambda = 0.$

Такой случай подробно анализируется в работе [3]. Здесь $V = V^iG_i$ и G_i – генераторы некоторой внутренней группы симметрии. Действие имеет вид

$$S = -\operatorname{tr}\int d^4x\, d^2\theta\, W^\alpha W_\alpha,$$

где W^α – *киральная* напряженность поля:

$$W_\alpha = \bar{D}^2[\,e^{-V},\ D_\alpha e^V].$$

Такое действие – действительная величина с точностью до полной производной. Квадратичную часть действия можно записать в виде

$$S_2 = -\operatorname{tr}\int d^4x\, d^4\theta\, V D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha V,$$

и она требует фиксации калибровки. Напомним, что $\pi_{1/2} = -2D^\alpha\bar{D}^2D_\alpha/\Box$ есть проекционный оператор, так же как и $\pi_0 = (D^2\bar{D}^2 + \bar{D}^2D^2)/\Box$, причем $\pi_0 + \pi_{1/2} = 1$. Поэтому, если выбрать калибровочные функции D^2V, $\bar{D}^2V$ и член, фиксирующий калибровку,

$$S_{GF} = -\alpha\operatorname{tr}\int d^4x d^4\theta\, D^2V\bar{D}^2V,$$

будем иметь

$$S_2 + S_{GF} = -\operatorname{tr}\int d^4x d^4\theta\frac{1}{2}V\Box(\alpha\pi_0 + \pi_{1/2})V.$$

В частности, при $\alpha = 1$ (калибровка Ферми – Фейнмана) получим обычный кинетический член и пропагатор

$$\langle TVV\rangle = -\frac{1}{p^2}\delta^4(\theta - \theta').$$

Рис. 6

Другие калибровки приводят к трудностям с инфракрасными расходимостями (пропагаторы $\sim 1/q^4$).

Чтобы ввести духовые поля, заметим, что калибровочные преобразования можно записать в виде

$$\delta_\Lambda V = -i L_{V/2}\,[\Lambda + \bar\Lambda + \operatorname{cth}(L_{V/2})(\Lambda - \bar\Lambda)],$$

$$L_X Y = [X, Y],$$

что приводит к действию

$$S_{FP} = i \operatorname{tr} \int d^4x\, d^2\theta\, c' \delta_c (\bar D^2 V) + \text{э.с.} =$$

$$= \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta\, (c' + \bar c')\, L_{V/2}\, [(c + \bar c) + \operatorname{cth} L_{V/2} (c - \bar c)]$$

с киральными и антикиральными духами. При $\alpha = 1$ преобразования БРС имеют вид

$$\delta V = -i L_{V/2} [i\varepsilon (c + \bar c) + \operatorname{cth}(L_{V/2})\, i\varepsilon\, (c - \bar c)],$$

$$\delta c = -\varepsilon c^2, \quad \delta \bar c = -\varepsilon \bar c^2,$$

$$\delta c' = \varepsilon \bar D^2 D^2 V, \qquad \delta c' = \varepsilon D^2 \bar D^2 V.$$

В низшем порядке по V полное действие таково:

$$S = \operatorname{tr} \int d^4x\, d^4\theta \{ -\frac{1}{2} V \Box V + \bar c' c - c' \bar c +$$

$$+ V\{D^\alpha V, \bar D^2 D_\alpha V\} + \frac{1}{2} (c' + \bar c')[V, (c + \bar c)] -$$

$$-\frac{1}{4} [V, D^\alpha V] \bar D^2 [V, D_\alpha V] - \frac{1}{3} D^\alpha V \bar D^2 [V, [V, D_\alpha V]] +$$

$$+ \frac{1}{12} (c' + \bar c')[V, [V, c - c']] + \ldots \}.$$

Например, однопетлевой векторный вклад в собственную энергию векторного поля описывается диаграммой рис. 6, в которой два оператора в вершинах D^α, $\bar D^2 D_\alpha$ могут действовать на любые две из трех линий. Но оба оператора $\bar D^2 D_\alpha$ и $\bar D^2 D_\beta$ не могут действовать на внешние линии: тогда в петле не осталось бы оператора $\bar D$, и в результате получился бы нуль.

Взаимодействие калибровочного суперполя с киральным суперполем возникает в результате ковариантизации кирального кинетического члена

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, e^{-V} \bar\varphi\, e^V \varphi = \int d^4x\, d^4\theta [\bar\varphi\varphi + \bar\varphi V \varphi + \ldots].$$

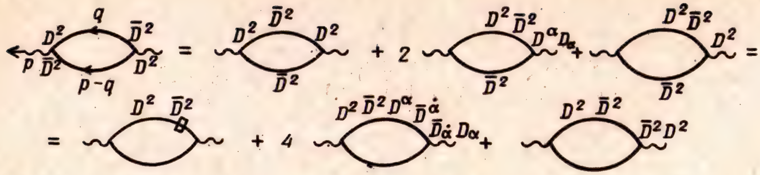


Рис. 7

Следовательно, вклад одной безмассовой киральной петли в собственную энергию векторного поля будет изображаться диаграммой, показанной на рис. 7, и возникающее выражение можно преобразовать, убрав D из нижней линии. Такой процесс показан на рис. 7. Первый член дает нуль после интегрирования по импульсу (головастик). Знак второго фиксируем в конце, учитывая порядок спинорных индексов. В случае однопетлевого интеграла такого типа пригоден обычный прием, который состоит в замене

$$2q^{\alpha\dot\alpha} \to p^{\alpha\dot\alpha} = 2\{D^\alpha, \bar D^{\dot\alpha}\} V,$$

и полный вклад будет

$$\bar D^2 D^2 + 2\{D^\alpha, \bar D^{\dot\alpha}\} \bar D_{\dot\alpha} D_\alpha = D^\alpha \bar D^2 D_\alpha,$$

после чего можно представить в калибровочно-инвариантной форме в виде интеграла $\int d^2\theta\, W^\alpha(-p,\theta) W_\alpha(p,\theta)$, умноженного на обычную (скалярную) диаграмму собственной энергии.

Б. Индексы расходимостей

Мы видим, что в перенормируемых теориях всем суперсимметричным вершинам соответствуют четыре множителя D (либо из $D^2\bar D^2$ от киральных суперполей, либо из D^α, $\bar D^2 D_\alpha$ от калибровочных суперполей). В неперенормируемых теориях могут быть дополнительные множители D, но мы здесь такие случаи не рассматриваем. Все наши вершины содержат $d^4\theta$.

Рассмотрим L-петлевой интеграл, содержаший P пропагаторов, V вершин и E внешних линий. Всего у нас будет $(D^2\bar D^2)^V \sim q^{2V}$ множителей. Пропагаторы имеют порядок $\sim 1/q^2$, причем $\phi\phi$ или $\bar\phi\bar\phi$ дают дополнительно $D^2/q^2 \sim 1/q$. Предположим, что имеется C таких пропагаторов. Каждая петля вносит $d^4q \sim q^4$ и поглощает один множитель $D^2\bar D^2 \sim q^2$ в силу ооотношения $\delta D^2\bar D^2\delta = \delta$. Каждая внешняя киральная линия также приводит к потере одного множителя $\bar D^2 \sim q$ в соответствующей вершине. Предположим, что число таких вершин равно E_C. Тогда степень расходимости будет равна $(L - P + V = 1)$

$$D = 4L - 2L - 2P + 2V - C - E_C = 2 - C - E_C.$$

Следовательно, в случае графиков, содержащих лишь внешние линии V, степень расходимости будет равна либо двум (однако калибровочная инвариантность позволяет улучшить сходимость), либо нулю (если имеются две внешние кираль-

ние линии). Более того, если все внешние линии киральные (или антикиральные), то петля должна содержать дополнительный множитель D^2, поскольку $\int d^4\theta\varphi^n = 0$; и, чтобы получить результат, отличный от нуля, необходимо иметь по крайней мере

$$\int d^4\theta\varphi^{n-1}D^2\varphi = \int d^2\theta \quad \varphi^{n-1}\,\Box\,\varphi.$$

Поэтому в таком случае сходимость улучшается и расходящейся оказывается лишь диаграмма собственной энергии $\bar\varphi\varphi$; масса и константы связи φ^2 и φ^3 не требуют перенормировки.

В. Некоторые общие результаты

С помощью изложенной техники были проведены расчеты β-функции в трехпетлевом [1] и четырехпетлевом [20] приближениях для модели Весса – Зумино и в трехпетлевом приближении для теории Янга – Миллса с $N = 4$ [2, 9, 10]. Последняя описывается действием

$$S = \mathrm{tr}\,[\int d^4x\,d^4\theta\,e^{-V}\bar\varphi_i\,e^V\varphi_i - \int d^4x\,d^2\theta\,W^\alpha W_\alpha +$$

$$+\frac{1}{3!}\int d^4x\,d^2\theta\,i\,\varepsilon_{ijk}\varphi_i\,[\varphi_j, \varphi_k] + \text{э.с.}].$$

В калибровке Ферми – Фейнмана все рассчитанные до сих пор радиационные поправки оказались конечными, но строго общего доказательства на этот счет пока нет. Без особой строгости можно рассуждать, исходя из (ненарушенной?) инвариантности данной теории относительно $O(4)$: поскольку вершины φ^3 и $\bar\varphi^3$ конечны во всех порядках, а симметрия $O(4)$ связывает эти вершины с другими членами, полное действие должно быть конечным. Однако доказательства, основанного на соответствующих тождествах Уорда, еше нет[1)].

Из других результатов отметим известный вывод о том, что если суперсимметрия не нарушена на классическом уровне, то эффективный потенциал равен нулю в точке классического минимума. Это следует непосредственно из того, что все диаграммы приводят к выражениям, содержащим интеграл $\int d^4\theta$. Чтобы результат интегрирования был отличным от нуля, в подынтегральное выражение должна входить величина θ, но это возможно лишь в случае, если некоторые вспомогательные поля (F или D) имеют отличные от нуля классические значения.

В этой связи напомним, что эффективный потенциал в обычных калибровочных теориях зависит от калибровки. По-видимому, еше не обращалось достаточное внимание на то обстоятельство, что в суперсимметричных теориях может быть дополнительная зависимость от калибровки, маскируемая тем, что обычно потенциал вычисляется в калибровке Весса – Зумино. Разумеется, с помощью суперполей можно получать результаты в произвольной калибровке.

[1)] См. примечание на с. 132. – *Прим. перев.*

Г. Развитие аппарата

В наших работах [8,10] было предложено для упрощения вычислений использовать метод фонового поля. В частности, однопетлевой векторный вклад можно упростить, выбрав подходящий фиксирующий калибровку член, ковариантный относительно фона; аналогичные упрощения возможны и в супергравитации. Другой пример – петля безмассового кирального поля, взаимодействующего с калибровочным суперполем (рис. 8).

Манипуляции с операторами D могут быть довольно громоздкими, а окончательный результат – крайне сложным. Зигель предложил возвращаться к действию $e^{-V}\bar{\varphi}\, e^{-V}\varphi$ и производить подстановку $\bar{\varphi} = \bar{D}^2\bar{U}$, $\varphi = D^2U$, где U – комплексное суперполе без связей. В результате появляется калибровочная инвариантность относительно $\delta U = D^\alpha \Lambda_\alpha$. Далее выбирается *определенный* член, фиксирующий калибровку, и в результате дополнительных манипуляций с D получаются новые правила Фейнмана, в которых каждой петле сопоставляется *единственный* оператор $\bar{D}^2$ и по крайней мере один оператор D^α в каждой вершине, а внешние линии становятся напряженностями поля или связностями. Результат, который мы приводим без объяснений, показан на рис. 9, где имеются одна вершина типа A и остальные вершины типа B:

$$A^\alpha = -2i\Gamma^\alpha, \qquad A = -\Gamma^\alpha\Gamma_\alpha + iD^\alpha\Gamma_\alpha,$$

$$B^\alpha = -2iW^\alpha, \qquad B = -2\Gamma^a\partial_a + (\Gamma^a\Gamma_a - \partial^a\Gamma_a - 2W^\alpha\Gamma_\alpha - iD^\alpha W_\alpha),$$

причем

$$e^{-V}D^\alpha e^V = D^\alpha - i\Gamma^\alpha,$$

$$e^{-V}\partial^a e^V = \partial^a - i\Gamma^a.$$

Это может показаться сложным, но нужно учитывать, что почти все алгебраические преобразования с D уже были выполнены. Есть и другие приемы, из них некоторые описаны в наших работах [9, 10]. В частности, там рассмотрен вопрос о вершине VVV специального вида. Но здесь необходимо усовершенствовать технику. Такая вершина состоит из шести членов (различные перестановки множителей D^α, $\bar{D}^2 D_\alpha$), и здесь были очень желательны дополнительные упрощения.

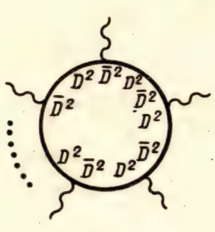


Рис. 8

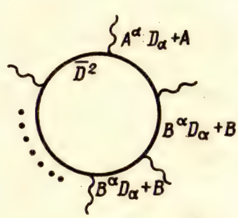


Рис. 9

Д. Дополнительная литература и упражнения

В качестве хорошего упражнения можно рекомендовать повторение вычислений β-функции в модели Весса – Зумино. Первоначальные правила были сформулированы в работе [8], но они также хорошо изложены в работе [2]. Другие примеры можно найти в работе [17], а также в моих докладах на семинаре по супергравитации в Стони-Брук и на конференции по великому объединению в Эриче [5, 6]. Соответствующие правила в супергравитации сейчас подвергаются дальнейшей разработке; они обсуждались на Наффилдском семинаре [7] и в работе [11].

§ 3. Суперграфы в супергравитации

В известном смысле здесь нет ничего нового. Нужно выразить действие через общее и киральное суперполя, выбрать подходящим образом член, фиксирующий калибровку, и вывести правила Фейнмана. Мы придерживаемся подхода Зигеля – Гейтса [24] к супергравитации, который в значительной мере основан на использовании экспоненциальных функций суперполей. Такой подход, как я отмечал на Наффилдском семинаре по супергравитации [7], оправдывается тем, что в методе фонового поля необходимо "хорошее" разграничение между фоновым и квантовыми полями, а экспоненты весьма удобны для этого. Но я не сомневаюсь, что то же самое возможно и при подходе Огиевецкого и Сокачева [15].

Правила Фейнмана уже были сформулированы Зигелем [22]; отметим также работу [13]. Нам стало ясно, что нужен такой формализм, в котором полностью использовалась бы общая суперковариантность теории на основе метода фонового поля и суперсимметрия на языке суперграфов. Такой общий формализм рассматривался в работе [11]; вычисления и ряд результатов будут опубликованы в дальнейшем. Моя цель – подготовить путь для расчета трехпетлевых расходящихся диаграмм в простой супергравитации. Если кто-нибудь докажет их отсутствие, то такая подготовка может оказаться ненужной, но, с другой стороны, она может сделать вычисление петель и более осмысленным.

А. Формализм Зигеля – Гейтса

Здесь невозможно изложить во всех подробностях эту формулировку супергравитации (см. оригинальную работу [24], а также лекции Рочека на Наффилдском семинаре [16]). Я буду придерживаться прикладного подхода: начну с определений и правил и выведу то, что необходимо для построения теории возмущений.

Основной объект – (аксиальное) векторное действительное суперполе, допускающее (в специальной калибровке) разложение

$$H^a(x, \theta, \bar\theta) = C^a(x) + \ldots + \theta\sigma^b\bar\theta h_b^a + \bar\theta^2\theta^\alpha\psi_\alpha^a + \ldots + \theta^2\bar\theta^2 A^a;$$

имеется также дополнительное киральное суперполе

$$\varphi = 1 + \chi = 1 + \ldots + \frac{1}{3}\theta^2 B,$$

которое формально делает теорию конформно-инвариантной. Можно было бы использовать калибровку $\varphi = 1$, но это менее удобно. Действие супергравитации имеет вид

$$S = -\frac{6}{\kappa^2}\int d^4x\, d^4\theta (1\cdot e^{-\overleftarrow{H}})^{1/3}\hat{E}^{-1/3}(1+\chi)e^{-H}(1+\bar{\chi}).$$

Здесь $H = H^a\partial_a$ и

$$1\cdot e^{-\overleftarrow{H}} = 1 - iH\cdot\overleftarrow{\partial} - \frac{1}{2}H\cdot\overleftarrow{\partial}H\cdot\overleftarrow{\partial} + \ldots = 1 - i\partial\cdot H - \frac{1}{2}\partial\cdot(H\partial\cdot H) + \ldots,$$

а величина $\hat{E}$ – определитель, для построения которого следует ввести "полуковариантные" производные

$$\hat{E}_\alpha = e^{-H}D_\alpha e^H,\quad \hat{E}_{\dot\alpha} = \bar{D}_{\dot\alpha},\quad \hat{E}_a = -i\sigma_a^{\alpha\dot\alpha}\{\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{\dot\alpha}\},$$

вычислить их (до любого порядко по H) и написать

$$\hat{E}_A = (\hat{E}_\alpha, \hat{E}_{\dot\alpha}, \hat{E}_a) = \hat{E}_A{}^B D_B,$$

где $D_b = (D_\beta, \bar{D}_{\dot\beta}, \partial_b)$. Тогда $\hat{E} = \det \hat{E}_A{}^B$ можно рассчитать с точностью до членов любого заданного порядка по H.

Полученное выражение можно использовать для квантовых расчетов после соответствующей фиксации калибровки. Калибровочные преобразования имеют вид

$$e^H \longrightarrow e^{i\bar{\Lambda}}e^H e^{-i\Lambda},\quad \varphi \longrightarrow e^{i\Lambda - 1/3(\partial_a\Lambda^a - D_\alpha\Lambda^\alpha)}\varphi,$$

$$\Lambda = i\,[\Lambda^a\partial_a + \Lambda^\alpha D_\alpha + \bar{\Lambda}^{\dot\alpha}\bar{D}_{\dot\alpha}],$$

$$\Lambda^a = -i\,\sigma^a_{\alpha\dot\beta}\bar{D}^{\dot\beta}L^\alpha,\quad \Lambda^\alpha = \bar{D}^2L^\alpha,\quad \Lambda^{\dot\alpha} = e^{-H}D^2\bar{L}^{\dot\alpha}.$$

Основным объектом является спинорный калибровочный параметр L_α, который приводит к возникновению соответствуюших спинорных духов. Читатель может сам убедиться, что выписанное выше действие инвариантно относительно этих калибровочных преобразований. Такая проверка – хорошее упражнение при ознакомлении с формализмом, так же как и запись явного выражения для действия. Например, после разложения квадратичная часть принимает вид

$$S_2 = \int d^4x\, d^4\theta\, [-6\bar{\chi}\chi + 2i(\chi - \bar{\chi})\partial\cdot H - \frac{1}{2}H^a\Box H_a$$
$$- \frac{1}{2}(\partial\cdot H)^2 - \frac{1}{6}([\bar{D}^{\dot\beta}, D^\alpha]H_{\alpha\dot\beta})^2 + \bar{D}^2H^aD^2H_a],$$

где $H^{\alpha\dot\beta} = \sigma_a{}^{\alpha\dot\beta}H^a$, и можно убедиться в ее инвариантности относительно бесконечно малых преобразований

$$\delta H_{\alpha\dot\beta} = -2(\bar{D}_{\dot\beta}L_\alpha - D_\alpha\bar{L}_{\dot\beta}),$$

$$\delta\chi = -\bar{D}^2L^\alpha D_\alpha\chi - \frac{1}{3}(\bar{D}^2D^\alpha L_\alpha)(1+\chi).$$

Член, фиксируюший калибровку, желательно выбрать так, чтобы упростить

кинетический член, например получить

$$S_2 + S_{GB} \sim \int d^4x \quad d^4\theta [\bar{\bar{\chi}}\chi - \frac{1}{2} H^a \Box H_a],$$

что приводит к пропагаторам, очень похожим на те, о которых шла речь выше. Это возможно, но я буду рассматривать более общий случай, когда имеются фоновые поля.

Для полноты изложения приведем формулы для других величин, представляющих интерес. Мы уже ввели $\hat{E}_A$ и $\hat{E}$. Введем дополнительно ψ и $\hat{C}_{AB}{}^C$ в соответствии с соотношениями

$$\psi = \varphi^{1/2}\bar{\bar{\varphi}}^{-1}(1 \cdot e^{-\bar{H}})^{-1/3} (\hat{E})^{1/6},$$

$$\{\hat{E}_A, \hat{E}_B\} = \hat{C}_{AB}{}^C \hat{E}_C.$$

Ковариантная супертетрада имеет вид

$$E_\alpha \equiv \psi \hat{E}_\alpha, \qquad E_{\dot{\alpha}} = \bar{\psi}\hat{E}_\alpha,$$

$$E_a = -i\sigma_a{}^{\alpha\dot{\beta}} \{\psi\hat{E}_\alpha, \bar{\bar{\varphi}}\hat{E}_{\dot{\beta}}\} - \frac{1}{2}\psi\bar{\bar{\psi}}\sigma_{[a}{}^{\alpha\dot{\beta}} [\hat{C}_{\alpha C]}{}^C \hat{E}_{\dot{\beta}} + C_{\dot{\beta}C]}{}^C \hat{E}_\alpha].$$

Тогда соотношением

$$[E_A, E_B] = C_{AB}{}^C E_C$$

вводятся величины $C_{AB}{}^C$, а коэффициенты связности будут иметь вид

$$\varphi_{\alpha bc} = -C_{\alpha[bc]},$$

$$\varphi_{abc} = -i\sigma_a^{\alpha\dot{\beta}} (E_\alpha \varphi_{\dot{\beta}bc} + E_{\dot{\beta}}\varphi_{\alpha bc} + \varphi_{\alpha[b}{}^d\varphi_{\dot{\beta}de]}),$$

где квадратными скобками обозначена антисимметризация. Наконец, ковариантные производные имеют вид (M – преобразование Лоренца)

$$\nabla_A = E_A + \frac{1}{2}\varphi_{Ab}{}^C M^b{}_C.$$

Эти выражения не очень изящны и непривычны. Но они дают возможность шаг за шагом вычислять интересующие нас величины с точностью до членов любого порядка по H и φ. Далее могут быть найдены напряженности полей R, $G_{\alpha\dot{\beta}}$, $W_{\alpha\beta\gamma}$ из определений

$$\{\nabla_\alpha, \nabla_\beta\} = -\bar{R}M_{\alpha\beta},$$

$$\{\nabla_\alpha, \bar{\bar{\nabla}}_{\dot{\beta}}\} = \frac{i}{2}\nabla_{\alpha\dot{\beta}},$$

$$[\nabla_\alpha, \frac{i}{2}\nabla_{\beta\dot{\gamma}}] = -\frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta}[-\bar{\bar{R}}\bar{\bar{\nabla}}_{\dot{\gamma}} + G^\delta{}_{\dot{\gamma}}\nabla_\delta +$$

$$+ (\nabla^\delta G_{\varepsilon\dot{\gamma}})M_{\delta\varepsilon} + \bar{W}_{\dot{\gamma}\dot{\delta}}{}^{\dot{\varepsilon}}\bar{M}_{\dot{\varepsilon}}{}^{\dot{\delta}} - \frac{1}{2}(\bar{\nabla}_{\dot{\gamma}}\bar{R})M_{\alpha\beta}].$$

Закончим замечанием относительно операторов преобразования Лоренца M. Их действие определяется соотношением

$$M_\alpha{}^\beta = \frac{1}{4}\sigma^a{}_{\alpha\dot\gamma}\sigma_b{}^{\beta\dot\gamma}M_a{}^b,$$

причем при произвольном антисимметричном $X_b{}^c$ выполняются соотношения

$$[\frac{1}{2}X_b{}^c M_c{}^b,\ f_a] = X_a{}^b f_b,$$

$$[\frac{1}{2}X_b{}^c M_c{}^b,\ f_\alpha] = X_\alpha{}^\beta f_\beta.$$

Б. Квантование методом фонового поля

Поскольку вычисления в супергравитации, как правило, весьма сложны, нужно максимально использовать ковариантность теории. При обычной процедуре квантования такая ковариантность нарушается из-за необходимости фиксации калибровки, но при квантовании методом фонового поля полностью используются все преимущества, связанные с ковариантностью. Идея состоит в том, чтобы расщепить поля на фоновую и квантовую части, выбрать подходящий член, фиксирующий калибровку, в ковариантном относительно фона виде и вычислить полностью ковариантный функционал фонового поля, из которого можно получить эффективное действие. В случае глобальной суперсимметрии такое построение проведено в работе [8], а в случае локальной – в работах [7, 11]. Дальнейших упрощений можно добиться, выбрав фиксирующий калибровку член в таком виде, чтобы частично уничтожить взаимодействие квантовой части с фоном, а также потребовав, чтобы фоновое поле было на массовой поверхности, т.е. удовлетворяло классическим уравнениям поля. Поскольку в большинстве случаев это оправдано с физической точки зрения, подобное ограничение представляется логичным. В результате выводится действие, содержащее фон и квантовые поля, в котором фоновая ковариантность проявляется следующим образом: фоновые поля присутствуют только в калибровочно-инвариантном виде, т.е. R, $G_{\alpha\dot\beta}$, $W_{\alpha\beta\gamma}$ (однако первые два обращаются в нуль на массовой поверхности), а также входят в ковариантные производные

$$\mathfrak{D}_A = \varepsilon_A{}^B\,\mathfrak{D}_B + \frac{1}{2}\varphi_{Ab}{}^C M^b{}_c,$$

действующие на квантовые поля.

В нашем подходе до фиксации калибровки квадратичная часть действия имеет вид (на массовой поверхности)

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \varepsilon^{-1}[-6\bar\chi\chi + 2i(\chi - \bar\chi)D\cdot H - \frac{1}{2}H^a\Box H_a -$$

$$-\frac{1}{2}(D\cdot H)^2 - \frac{1}{6}([\bar D^{\dot\beta}, D^\alpha]H_{\alpha\dot\beta})^2 + \bar D^2 H^a D^2 H_a -$$

$$-\frac{1}{2}H^{\alpha\dot\beta}(W_\alpha{}^{\gamma\delta}D_\gamma H_{\delta\dot\gamma} + \bar W_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma\dot\delta}\bar D_{\dot\gamma}H_{\alpha\dot\delta})].$$

Если не считать последнего члена, то это просто ковариантизованная форма выражения, приведенного выше.

Действие обладает (квантовой) калибровочной инвариантностью относительно ковариантизованной формы преобразований, приведенных ранее. Мы фиксируем калибровку так, чтобы свести кинетическую часть оператора H к виду $H\square H$ и уничтожить перекрестные члены вида $H\chi$. Это можно сделать двумя способами.

1. С помощью фиксирующей калибровку функции

$$F_\alpha = \bar{D}^{\dot\beta}\left(H_{\alpha\dot\beta} + \frac{2i}{5} D_{\alpha\dot\beta}\,\square_+^{-1}\,\bar\varphi^3\right),$$

где

$$\square_+ = \square + 2\bar{W}_{\dot\beta}{}^{\dot\alpha\dot\gamma}\,\bar{D}_{\dot\alpha}\bar{M}_{\dot\gamma}{}^{\dot\delta}.$$

Данное выражение нелокально и приводит к нелокальностям в духовом действии. Правда, эти нелокальности встречаются лишь в кинетической части духового действия и могут быть устранены введением дополнительных духов (но при избавлении от последних нелокальности воспроизводятся).

2. Заменив сначала киральное поле φ действительным полем V

$$\varphi^3 = 1 - \bar{D}^2 V$$

и используя фиксирующую калибровку функцию

$$F_\alpha = \bar{D}^{\dot\beta} H_{\alpha\dot\beta} + D_\alpha V.$$

Поле V само обладает некоторой калибровочной симметрией и в свою очередь требует фиксации калибровки и новых духов. Оба метода приводят к одинаковой S-матрице, но различаются своими топологическими предсказаниями, например аномалиями: при суперполевом подходе киральные суперполя (которые могут возникать как духи в случае суперполя общего вида) дают аномалии; переход от φ к V не приводит к топологическим следствиям.

Детальный процесс фиксации калибровки довольно сложен, и мы не будем здесь его затрагивать [11, 23]. Результат для квадратичного квантового действия, пригодный для однопетлевых вычислений, таков :

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \varepsilon^{-1}\Big[-\frac{1}{2}H^a\square H_a - \frac{18}{5}\bar{\chi}\chi -$$

$$-\frac{1}{2}H^{\alpha\dot\beta}\left(W_\alpha{}^{\gamma\delta}D_\gamma H_{\delta\dot\beta} + \bar{W}_{\dot\beta}{}^{\dot\gamma\dot\delta}\bar{D}_{\dot\gamma}H_{\alpha\dot\delta}\right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{3}\bar\psi_i{}^{\dot\beta}\, i D_{\alpha\dot\beta}\psi_i^\alpha + \sum_{i=1}^{2}\varphi_i^\alpha D^2\varphi_{i\alpha} + \text{э.с.}\Big]$$

или

$$S = \int d^4x\, d^4\theta\, \varepsilon^{-1} [\ldots\ldots\ldots .$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$+ \sum_{i=1}^{3} \bar{\Psi}_i{}^{\dot\beta}\, i\, D_{\alpha\dot\beta} \Psi_i{}^{\alpha} + \sum_{i=1}^{3} V_i \Box V_i + \sum_{i=1}^{7} \bar{\chi}_i \chi_i]$$

в зависимости от того, какова была форма фиксации калибровки (первая или вторая).

Отметим следующее.

1. Лишь $\Psi_{i\alpha}$ и χ_i обладают ненормальной статистикой.

2. Киральные поля χ, $\varphi_i{}^{\alpha}$ ковариантно-киральны по отношению к фону. Это просто означает, например, что

$$\bar{\chi} = e^{-H_{\text{фон}}} \bar{\chi},$$

причем $\bar{\chi}$ справа – обычное антикиральное поле.

3. Общие спинорные духовые поля $\Psi_{1\alpha}, \Psi_{2\alpha}$ соответствуют первоначальному спинорному параметру L_{α}, тогда как $\Psi_{3\alpha}$ – духовое поле Нильсена – Каллош [12, 14]. Киральные спиноры $\Psi_{i\alpha}$ являются духами второго поколения, ассоциируемыми с калибровочной симметрией духов первого поколения. Другие духовые поля взаимно уничтожаются или на однопетлевом уровне отделяются.

4. Во втором варианте спинорные духи второго поколения заменены действительными духами V_i. Величины χ_i – духи третьего поколения, обусловленные калибровочной инвариантностью духов V_i.

§ 4. Вычисления в супергравитации

Я изложу часть вычислений в однопетлевом приближении, приводящих к однопетлевому эффективному действию с точностью до четырех внешних полей (на массовой поверхности). Проще всего вычисляется вклад суперполей общего вида V или Ψ_{α}.

Действие для Ψ_{α} дается выражением

$$\varepsilon^{-1} \bar{\Psi}^{\dot\beta}_i D_{\alpha\dot\beta} \Psi^{\alpha} = \varepsilon^{-1} i \sigma^{a}{}_{\alpha\dot\beta} \bar{\Psi}^{\dot\beta} [\varepsilon_a{}^c \partial_c + \varepsilon_a{}^{\gamma} \bar{D}_{\gamma} + \varepsilon_a{}^{\dot\gamma} \bar{D}_{\dot\gamma} + \text{связности}] \Psi^{\alpha},$$

где

$$\varepsilon^{-1} = 1 + O(H_{\text{фон}}),$$

$$\varepsilon_a{}^c = \delta_a{}^c + O(H_{\text{фон}}), \quad \varepsilon_a{}^{\dot\gamma},\ \varepsilon^{\dot\gamma}_a = O(H_{\text{фон}}).$$

Ясно, что пропагатор возникает из соотношения $E_a{}^c = \delta_a{}^c$ и имеет вид

$$-\frac{\sigma \cdot p}{p^2} \delta^4(\theta - \theta').$$

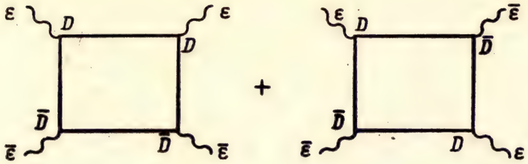


Рис. 10

Поскольку члены взаимодействия по крайней мере линейны по D и $\bar{D}$, первая диаграмма, которая дает вклад, есть квадратик (рис. 10). С точностью до множителей вклад первой диаграммы, очевидно, равен

$$\mathrm{tr}\,\frac{\sigma\cdot q\sigma\cdot\varepsilon^{\alpha}\sigma\cdot(q+p_1)\sigma\cdot\varepsilon_{\alpha}\sigma\cdot(q+p_1+p_2)\sigma\cdot\bar{\varepsilon}^{\dot{\alpha}}\sigma\cdot(q-p_4)\sigma\cdot\bar{\varepsilon}_{\dot{\alpha}}}{q^2(q+p_1)^2\,(q+p_1+p_2)^2\,(q-p_4)^2}$$

и совпадает с тем, что мы имеем в КЭД. Путем прямых выкладок можно убедиться в том, что логарифмическая особенность исчезает и полный результат принимает вид произведения

$$\mathbb{W}^{\alpha\beta\gamma}(x,\theta)\,\mathbb{W}_{\alpha\beta\gamma}(x_2,\theta)\,\bar{\mathbb{W}}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}(x_3,\theta)\,\bar{\mathbb{W}}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}\dot{\gamma}}(x_4,\theta),$$

умноженного на нелокальную функцию координат x.

Действие для V дается выражением

$$\varepsilon^{-1}V\Box V=\varepsilon^{-1}V\mathfrak{D}^{a}\mathfrak{D}_{a}V=$$

$$=\varepsilon^{-1}V[\varepsilon^{a\alpha}D_{\alpha}+\varepsilon^{a\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}}+\varepsilon^{ac}\partial_{c}+\frac{1}{2}\varphi^{a}{}_{c}{}^{d}M^{c}{}_{d}]\,\cdot$$

$$\cdot[\varepsilon_{a}{}^{\beta}D_{\beta}+\varepsilon_{a}{}^{\dot{\beta}}\bar{D}_{\dot{\beta}}+\varepsilon_{a}{}^{\alpha}\partial_{\alpha}]V.$$

Часть, не зависящая от фоновых полей, есть $V\partial^{a}\partial_{a}V$, что приводит к V-пропагатору

$$<TVV>=\frac{2}{p^2}\,\delta^4(\theta-\theta').$$

Однопетлевые вклады по-прежнему возникают только от вершин, приводящих к появлению в петле по крайней мере двух операторов D и двух $\bar{D}$. Для диаграмм, содержащих не более четырех внешних линий $[\varepsilon_{a}{}^{\alpha}=O(H_{\text{фон}})]$, таковыми являются лишь члены

$$V[\frac{1}{2}\,\varepsilon^{a\alpha}\varepsilon_{a\alpha}D^2+\frac{1}{2}\,\varepsilon^{a\dot{\alpha}}\varepsilon_{a\dot{\alpha}}\bar{D}^2+2(\varepsilon^{a\alpha}D_{\alpha}+\varepsilon^{a\dot{\alpha}}\bar{D}_{\dot{\alpha}})\partial_{a}]V,$$

а вклад диаграмм с числом внешних линий, *меньших* четырех, отсутствует.

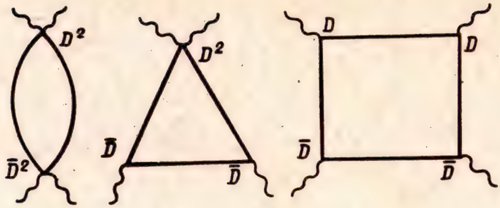


Рис. 11

Эффективное действие дается диаграммами, изображенными на рис. 11, где также показаны операторы D (возможны перестановки). Алгебраические преобразования с операторами D тривиальны, после чего остается взять обычные интегралы по импульсам. Оказывается, что существенный вклад дает лишь последняя диаграмма, и вот почему.

В силу ковариантности по отношению к фону и вследствие того, что мы находимся на массовой поверхности, результат может быть только функционалом от $W_{\alpha\beta\gamma}$, если не считать ковариантизации нелокальных величин, таких,как $1/\Box$. Кроме того, можно утверждать, что данный вклад в эффективное действие конечен на массовой поверхности: возможные суперсимметричные контрчлены W^2 и $\bar{W}^2$ обращаются в нуль на массовой оболочке (разумеется, в этом можно убедиться прямым вычислением). Следовательно, возможные члены имеют вид

$$\Gamma \sim \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^2\theta\, W^{\alpha\beta\gamma}(x_1, \theta)\, W_{\alpha\beta\gamma}(x_2\theta)\, G(x_1, x_2) + \text{э.с.} +$$

$$+ \int d^4x_1 \ldots d^4x_4\, W(x_1, \theta)\, W(x_2, \theta)\, \bar{W}(x_3, \theta)\, \bar{W}(x_4, \theta)\, G(x_1, \ldots, x_4),$$

что вытекает из суперсимметрии и соображений размерности. Величины G— ковариантизованные нелокальные функции координат x_i. Ясно, что если бы первый член действительно существовал, то вклад в него давала бы двухточечная функция; но, как мы только что заметили, V-петля не дает такого вклада. Оказывается, что роль этой диаграммы, так же как и второй, состоит в сокращении определенных вкладов третьей диаграммы. Третья диаграмма после алгебраических преобразований операторов D в импульсном представлении дает вклад

$$[2E^{a\alpha}(p_1)\, E_\alpha{}^b(p_2)\, \bar{\varepsilon}^{c\dot{\beta}}(p_3)\, \varepsilon^{d\alpha}{}_{\dot{\beta}}(p_4) + p_2 \longleftrightarrow p_3,\ b \leftrightarrow c] \cdot$$

$$\cdot \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{(q + p_1)_a (q + p_1 + p_2)_b (q - p_4)_c q_d}{q^2 (q + p_1)^2 (q + p_1 + p_2)^2 (q - p_4)^2}.$$

Фоновая калибровочная инвариантность здесь означает, что данное выражение должно зависеть только от напряженностей поля

$$W_{\alpha\beta\gamma} \sim \sigma^a{}_\beta{}^{\dot{\gamma}} \sigma^b{}_{\gamma\dot{\gamma}} \varepsilon_{\alpha a, b},$$

т.е. величин $\partial_b E_a - \partial_a E_b$. Поэтому вычисления такие же, как и в КЭД. Для извлечения конечной части следует просто вычесть значение интеграла при нулевых импульсах внешних линий.

Вклады поля H аналогичны. Труднее всего вычислить вклад киральных полей, но и здесь различными приемами можно предельно упростить алгебраические действия с D, и остается вычислить интегралы по импульсам, которые не сложнее, чем в КЭД. Детали вычислений будут опубликованы позже.

Мы полагаем, что двухпетлевые вычисления, несмотря на всю их сложность, выполнимы, а ЭВМ позволит рассчитать и трехпетлевые расходимости.

Литература

1. *Abbott L.F., Grisaru M.T.* The 3-loop β-function in the Wess-Zumino model, Nucl. Phys., **B169**, 415 (1980).
2. *Caswell W., Zanon D.* Zero three-loop beta function in the N = 4 supersymmetric Yang-Mills theory, Nucl. Phys., **B 182**, 125 (1981).
3. *Ferrara S., Piguet O.* Perturbation theory and renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories. Nucl. Phys., **B93**, 261 (1975).
4. *Ferrara S., Zumino B.* Supergauge invariant Yamg-Mills theories. Nucl. Phys., **B79**, 413 (1974).
5. *Grisaru M.T.*, Superloops, in Supergravity, eds. D.Z.Freedman, P. van Nieuwenhuizen, North-Holland (1979), p. 1.
6. *Grisaru M.T.* Superfield perturbation theory, in Unification of the fundamental particle interaction, eds. S.Ferrara, J.Ellis, P. van Nieuwenhuizen, Plunum Press (1980), p. 545.
7. *Grisaru M.T.* Background superfield method, In: Superspace and Supergravity, eds. S. Hawking, M. Roček, Cambridge University Press (1981), p. 135.
8. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Improved methods for supergraphs. Nucl. Phys., **B169**, 429 (1979).
9. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Zero value of the 3-loop β-function in N = 4 super Yang-Mills theory. Phys. Rev. Lett., 45, 1063 (1980).
10. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Superloops 3, beta 0. Nucl. Phys., **B183**, 141 (1981).
11. *Grisaru M.T., Siegel W.* Supergraphity I. Nucl. Phys. **B187**, 149 (1981).
12. *Kallosh R.E.* Modified Feynman rules in supergravity. Nucl. Phys., **B141**, 141 (1978).
13. *Namazie M.A., Storey D.* Supersymmetric quantization of linearized supergravity, Nucl. Phys., **B157**, 170 (1979).
14. *Nielsen N.K.* Ghost counting in supergravity. Nucl. Phys., **B140**, 499 (1978).
15. *Ogievetski V., Sokatchev E.* Structure of the supergravity group. Phys. Lett., **79 B**, 222 (1978).
16. *Roček M.* An introduction to superspace and supergravity. In: Superspace and Supergravity, eds. S.Hawking, M. Rocek, Cambridge University Press (1981), p. 71.

17. *Roček M., Townsend P.*, Three-loop finiteness of the N = 4 supersymmetric nonlinear σ-model. Phys. Lett., **96B**, 72 (1980).
18. *Salam A., Strathdee J.* Super-gauge transformations. Nucl. Phys., **B76**, 477 (1974).
19. *Salam A., Strathdee J.* Feynman rules for superfields. Nucl. Phys., **B86**, 142 (1975).
20. *Sen A., Sundaresan M.K.*, The four-loop β-function for the Wess – Zumino model Phys. Lett., **101B**, 61 (1981).
21. *Siegel W.* Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction, Phys. Lett., **93B**, 170 (1979).
22. *Siegel W.* Hidden ghosts. Phys. Lett., **93B**, 170 (1981).
23. *Siegel W.* The wraiths of graphs. In: Superspace and Supergravity, eds. S.Hawking, M. Roček, Cambridge University Press (1981), p. 151.
24. *Siegel W., Gates S.J.* Superfield supergravity. Nucl. Phys., **B 147**, 77 (1979).
25. *Wess J., Zumino B.* Super-gauge transformations in four dimensions. Nucl. Phys., **B70**, 39 (1974).

ШЕСТЬ ЛЕКЦИЙ ПО СУПЕРГРАВИТАЦИИ

П. ван Ньювенхёйзен*

§ 1. Элементарная супергравитация ($N = 1$)

Супергравитация – единственный известный пример лагранжевой теории поля с локальной фермионной калибровочной инвариантностью. Калибровочным параметром здесь служит спинорное поле со спином 1/2. Так как при размерности $d \neq 4$ нельзя определить пунктирные и непунктирные спиноры, мы для единообразия будем рассматривать при $d = 4$ четырехкомпонентные спиноры (хотя при $d = 4$ часто удобным оказывается двухкомпонентный формализм Ван-дер-Вардена). Калибровочные параметры обозначим через $\varepsilon^{a}(x)$, $a = 1, \ldots, 4$, причем, как следует из связи между спином и статистикой, они являются антикоммутирующими.

Локальная симметрия, отвечающая параметру $\varepsilon(x)$, должна переводить бозоны в фермионы, и наоборот. Это следует из условия, что вариация бозона B (или фермиона F) должна иметь ту же статистику, что и исходное поле. Как подробно объяснено в работе [1], отсюда следует, что

$$\delta B = \bar{F}\varepsilon, \qquad \delta F = \frac{1}{4}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}B\varepsilon . \tag{1}$$

Наличие производной связано с различием размерностей бозонов и фермионов, в чем проявляется то, что кинетические члены в действии для бозонных полей содержат две, а в действии для фермионных полей одну – производную.

Вычисляя коммутатор двух *глобальных* преобразований суперсимметрии, мы приходим к универсальному выражению

$$[\delta(\varepsilon_1), \delta(\varepsilon_2)]\, B = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_2\gamma^{\mu}\varepsilon_1\partial_{\mu}B + \ldots . \tag{2}$$

Например, для системы "фотона" и "нейтрино" мы имеем $\delta A_{\mu} = -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_{\mu}\lambda$ и $\delta\lambda = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\varepsilon$, а потому получаем

$$[\delta(\varepsilon_1), \delta(\varepsilon_2)]\, A_{\mu} = \xi^{\nu}\partial_{\nu}A_{\mu} + \partial_{\mu}(-\xi^{\nu}A_{\nu}), \tag{3}$$

---

* *P. van Nieuwenhuizen*, Университет шт. Нью-Йорк, Стони-Брук.

где $\xi^\nu = \frac{1}{2}\,\bar{\varepsilon}_2\gamma^\nu\varepsilon_1$. Мы видим, что глобальная суперсимметрия приводит к трансляциям и максвелловским калибровочным преобразованиям!

Пять лет назад нам с Фридманом и Феррарой стало понятно, что если параметр ε^a станет локальным, то в выражении (2) все равно будет член с $\xi^\mu(x)\partial_\mu B$. Он, очевидно, отвечает локальной трансляции, а это служит указанием на то, что в правой части соотношения (2) должно стоять обшекоординатное преобразование. Инвариантность относительно обшекоординатных преобразований с необходимостью приводит к теории гравитации. Ввиду наличия в суперсимметричных теориях спиноров необходимо использовать такую формулировку теории гравитационного поля, в рамках которой можно было бы включить взаимодействие со спинорами. А именно, гравитационное поле следует описывать векторами $e_\mu{}^m$ (тетрадой при $d = 4$).

Ввиду предполагаемой симметрии между бозонами и фермионами естественно задать вопрос: какая частица будет фермионным аналогом гравитона? Спинорному параметру ε^a можно приписать спин 1/2 [1]). Поэтому неприводимые представления группы симметрии, генерируемой глобальной суперсимметрией, должны содержать бозоны и фермионы с "соседними" спинами: J, $J + 1/2$, $J + 1$, ... Оказывается, что (по крайней мере в безмассовых теориях) достаточно рассмотреть дублеты "фермион – бозон" [2]. Интересующий нас вопрос теперь можно сформулировать так: существует ли мультиплет глобальной суперсимметрии, содержащий гравитон, и какая частица будет фермионным аналогом гравитона? Подробный анализ данного вопроса проведен в работе [3], но и так ясно, что этот фермионный аналог должен иметь спин, равный либо 3/2, либо 5/2. Проще всего выбрать 3/2, и это есть одновременно единственный возможный выбор (см. примечание). Итак, фермионный аналог гравитона $e_\mu{}^m$ есть гравитино со спином 3/2, описываемое полем $\psi_\mu{}^a$. Существуют также другие сопоставления поля частице со спином 3/2, например ψ_{abc}, где подразумевается симметрия по трем пунктирным (или непунктирным) спинорным индексам. Но подобные представления, приводящие к эквивалентным результатам, технически менее удобны. То, что спин-вектор $\psi_\mu{}^a$ содержит представление спина 3/2, следует из правил сложения угловых моментов (точно так же доказывается, что $e_\mu{}^m$ отвечает спину 2). Почему берется $\psi_\mu{}^a$, а не ψ_{abc} тоже понятно: в закон преобразования калибровочного поля должен входить член с $\partial_\mu\varepsilon$, необходимый для обобщения глобальной суперсимметрии набора полей материи до локальной суперсимметрии. Вариация глобально-суперсимметричного действия по определению равна нулю в случае, если параметр ε постоянен. Следовательно, для локального параметра $\varepsilon(x)$ мы получаем

$$\delta(\varepsilon(x)) \int d^4x\,\mathcal{L} = \int d^4x\, j_N^\mu\,\partial_\mu\varepsilon(x), \tag{4}$$

---

[1]) Если взять параметр ε^a со спином 3/2, то теории с соответствующими глобальными симметриями приводят к "духовым" состояниям в спектре. Что еще хуже, калибровочное поле, отвечающее симметрии, имеет спин 5/2 и, следовательно, не может непротиворечивым образом взаимодействовать с гравитацией [18]. Таким образом, для спина фермионного параметра, по-видимому, допустимо лишь значение 1/2.

где $\mathfrak{L}$ – лагранжиан полей материи, а $j_N{}^{\mu}$ – так называемый нётеровский ток. При наличии поля ψ_μ, преобразующегося согласно $\delta\psi_\mu = \partial_\mu\varepsilon + \ldots$, мы можем сократить член с $\partial_\mu\varepsilon$ в (4), добавив к лагранжиану член $\mathfrak{L}(N) = -j_N{}^{\mu}\psi_\mu$. Вариация лангранжиана $\mathfrak{L}(N)$ содержит, естественно, дополнительные члены, но, как показано в работе [4], для построения инвариантного действия необходимо добавить к исходному лагранжиану лишь конечное число членов (исключение составляет лишь действие, содержашее поля материи со спином 0).

Упражнение. Повторите приведенные выше рассуждения для случая электромагнетизма.

Таким образом, теория локальной суперсимметрии в то же время является и калибровочной теорией поля со спином 3/2. Как следует из сказанного выше, теория локальной суперсимметрии одновременно является и теорией гравитации. Этим объясняется ее название : "супергравитация".

Перейдем теперь к алгебре суперсимметрии. Для построения взаимодействия системы фотона и нейтрино с калибровочными полями супергравитации $e_\mu{}^m$ и $\psi_\mu{}^a$ необходимо добавить дополнительные члены как в действие, так и в законы преобразования всех четырех полей. Эти дополнительные члены призваны обеспечить инвариантность полного действия, т.е. действия калибровочных полей с учетом членов взаимодействия (включающих максвелловское и дираковское действие в кривом пространстве), нётеровские члены *и т.д.* Новым обстоятельством здесь является необходимость введения полей материи (λ, A_μ) в законы преобразования калибровочных полей (в данном случае ψ_μ). Это не позволяет складывать инвариантные действия так, чтобы сумма снова была инвариантной. Данную трудность удается обойти путем введения вспомогательных полей.

Вспомогательные поля необходимы также и для другой цели. Рассмотрим коммутатор (2) в случае преобразований локальной суперсимметрии без вспомогательных полей. Как показано в работе [1], локальные законы преобразования существенным образом отличаются от глобальных; например, мы получаем

$$[\delta(\varepsilon_1(x)), \delta(\varepsilon_2(x))]A_\mu = (\partial_\mu\xi^\alpha)A_\alpha + \xi^\alpha\partial_\alpha A_\mu + \\ + \partial_\mu(-\xi^\alpha A_\alpha) + \frac{1}{2}(-\xi^\alpha\bar{\psi}_\alpha)\gamma_\mu\lambda. \qquad (5)$$

В добавление к ожидаемым обшекоординатному преобразованию и максвелловскому калибровочному преобразованию в правой части (5) имеется преобразование локальной суперсимметрии с параметром $-\xi^\alpha\psi_\alpha$. Вычислив этот же коммутатор для λ, можно найти, что

$[\delta(\varepsilon_1(x)), \delta(\varepsilon_2(x))]\lambda =$ (Общекоординатное преобр.) + (Преобр. локальной суперсимметрии) + (Локальное преобр. Лоренца) + (члены с $\hat{D}\lambda$). (6)

Здесь имеются члены, которых не было в случае действия коммутатора на A_μ.

1. Член локального лоренцева преобразования, параметр которого есть $\xi^\alpha \omega_\alpha{}^{mn}(e, \psi)$, где $\omega_\alpha{}^{mn}$ — спиновая связность. Выражение для $\omega_\alpha{}^{mn}$ можно найти (по аналогии с методом Палатини в обшей теории относительности) на основе решения уравнений поля, отвечаюших связности ω.

2. Члены, пропорциональные уравнению поля для λ. Коммутатор двух симметрий данного действия, конечно, равен сумме симметрий действия, так что члены с $\hat{D}\lambda$ отвечают новым локальным симметриям действия. Но если мы попытаемся включить эти симметрии в алгебру симметрий действия, то убедимся что новые коммутаторы приводят к новым симметриям и т.д. Полученная алгебра, по-видимому, будет содержать бесконечное число симметрий. Обычно предпочитают работать с конечномерными алгебрами. Чтобы получить конечномерную супералгебру, нам следует исключить член с $\hat{D}\lambda$. Это почти всегда можно сделать путем введения нескольких новых полей, которые обычно входят в действие в виде квадратичных членов без производных и, следовательно, являются "нефизическими". В нашем примере полей (A_μ, λ) члены типа $\hat{D}\lambda$ возникают уже в коммутаторе $[\delta(\varepsilon_1), \delta(\varepsilon_2)]$ глобальных суперпреобразований в случае свободных полей. Для устранения этих членов достаточно ввести в теорию одно вспомогательное поле D. Полное глобальное суперсимметричное действие для свободных полей в пределе плоского пространства имеет вид интеграла от

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_m A_n - \partial_n A_m)^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}\hat{\partial}\lambda + \frac{1}{2}D^2 . \tag{7}$$

Мы видим, что вспомогательное поле D действительно входит в лагранжиан лишь в виде квадрата (без производных). В самом деле, размерность поля D на "половину" больше размерности поля λ. Поэтому возможные члены с $\delta\lambda \sim D\varepsilon$ не будут содержать производных. Это — обшее положение: в вариации фермионного поля $\delta F \sim \partial_\mu B_1 \gamma_m \varepsilon + B_2 \varepsilon$ бозонное поле B_1 будет физическим, а поле B_2 — вспомогательным. Так как $D = 0$ есть уравнение поля, а симметрии переводят уравнения поля в уравнения поля, вариация δD должна быть пропорциональна $\hat{\partial}\lambda$. Полное выражение для законов преобразования для этой глобально суперсимметричной системы полей таково:

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_\mu\lambda, \qquad \delta\lambda = \sigma^{mn}\partial_m A_n \varepsilon + \frac{i}{2}\gamma_5 D\varepsilon,$$
$$\delta D = \frac{i}{2}\bar{\varepsilon}\gamma_5\hat{\partial}\lambda. \tag{8}$$

Перейдем теперь к вопросу о действии для калибровочных полей супергравитации. Поскольку одно из этих полей есть тетрада, это действие должно, очевидно, содержать часть, совпадающую со стандартным гравитационным действием Гильберта. Так как в теории имеются фермионы, следует записать действие, выразив его не через метрику $g_{\mu\nu}$ и символы Кристоффореля, а через тетраду $e_\mu{}^m$ и спиновую (или лоренцеву) связность $\omega_\mu{}^{mn}$. Используя для связи между $\{{}^{\lambda}_{\mu\nu}\}$ и $\omega_\mu{}^{mn}$ "тетрадный постулат"

$$\partial_\mu e_\nu^m - \{\mu{}^\alpha{}_\nu\}\, e^m{}_\alpha + \omega_\mu^{mn}\, e_{n\nu} = 0, \tag{9}$$

мы находим $\omega_{\mu mn}(e)$ и можем доказать *тождество*

$$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}(\{\ \ \})\, e_{m\alpha}\, e_n{}^{\beta} = R_{\mu\nu mn}(\omega), \tag{10}$$

$$R_{\mu\nu mn} = \partial_\mu \omega_{\nu mn} + \omega_{\mu m}{}^{k}\, \omega_{\nu kn} - (\mu \leftrightarrow \nu). \tag{11}$$

В обшем случае мы *не будем* предполагать, что $\omega_{\mu mn}$ совпадает с $\omega_{\mu mn}(e)$. Тогда "тетрадный постулат" имеет вид

$$\partial_\mu e_\nu{}^m - \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, e^m_\alpha + \omega_\mu{}^{mn}\, e_{n\nu} = 0, \tag{12}$$

где величина Γ может быть выражена через ω. Мы будем везде пользоваться связностью ω, а не Γ. Таким образом, бозонную часть действия простой ($N = 1$) супергравитации можно записать в виде

$$I = \int d^4x\, \frac{-e}{2k^2}\, R_{\mu\nu mn}(\omega)\, e^{m\nu} e^{n\mu} \equiv \int d^4x\, \frac{-e}{2k^2}\, R(e, \omega). \tag{13}$$

Ниже мы найдем явное выражение для ω.

Действие для гравитино находится однозначно, если потребовать, чтобы в теории отсутствовали возбуждения с отрицательной энергией. Это однозначное действие есть калибровочное действие, так что калибровочная инвариантность *выводится* из условия положительности энергии. (То же самое относится ко всем полям со спином $J \geqslant 1$.) Лагранжиан гравитино имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\, \bar{\psi}_\mu \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho]}\, \partial_\nu \psi_\rho, \tag{14}$$

где $[\quad]$ – символ антисимметризации, а γ^μ – матрицы Дирака; чертой обозначено дираковское сопряжение.

Теперь мы в состоянии "угадать" действие простой супергравитации. Нужно лишь заменить производную ∂_μ гравитационной ковариантной производной $D_\mu \psi_\rho = \partial_\mu \psi_\rho + \frac{1}{2}\, \omega_\mu{}^{mn} \sigma_{mn} \psi_\rho$, где σ_{mn} – спинорные генераторы группы Лоренца. В результате получаем

$$I = \int d^4x \left[\frac{-e}{2k^2}\, R(e, \omega) - \frac{e}{2}\, \bar{\psi}_\mu \gamma^{[\mu} \gamma^{\nu} \gamma^{\rho]}\, D_\nu \psi_\rho\right]. \tag{15}$$

В принципе мы могли бы добавить в $D_\rho \psi_\sigma$ член с $\Gamma^{\alpha}{}_{\rho\sigma} \psi_\alpha$, который привел бы к отличному от нуля вкладу при наличии кручения (тензор кручения есть $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \Gamma^{\rho}_{\nu\mu}$). Замечательно, что полное инвариантное действие в точности равно I и не содержит члена с $\Gamma\psi$ и дополнительных четырехфермионных членов взаимодействия, если выражение для ω найдено из решения соответствующих связности (алгебраических) уравнений поля. Это решение имеет вид [1]

$$\omega_{\mu mn}(e, \psi) = \omega_{\mu mn}(e) + \frac{k^2}{4}\left(\bar{\psi}_\mu \gamma_\mu \psi_n - \bar{\psi}_\mu \gamma_n \psi_m + \bar{\psi}_m \gamma_\mu \psi_n\right). \tag{16}$$

Подставив $\omega(e,\psi)$ в I и разложив результат по ψ, мы приходим к ряду четырехфермионных членов. Условием локальной суперсимметрии диктуются определенные значения их коэффициентов; любое изменение коэффициента сразу же нарушает суперсимметрию. Здесь уместно указать на следующую интересную возможность. Рассмотрим, например, скалярное поле φ с действием, включающим юкавское взаимодействие $\bar{\lambda}\lambda\varphi$ и φ^4-взаимодействие. Как и выше, в силу суперсимметрии отношение соответствующих констант связи должно иметь строго определенное значение. Слишком большая константа φ^4-взаимодействия означала бы слишком сильное притяжение и привела бы к свободной теории поля (φ^4-взаимодействие аналогично взаимодействию типа дельта-функции, которое, согласно точным непертурбативным вычислениям, не приводит к рассеянию в трех измерениях). Слишком большое значение юкавской константы привело бы к катастрофическому сжатию (как в случае черной дыры) и к отсутствию разумного определения состояний "in" и "out".

На этом основании Фейнман и Кертрайт выдвинули гипотезу, что единственными физическими моделями являются суперсимметричные модели, которые образуют "водораздел" между двумя нефизическими возможностями.

Определив действие, мы можем найти законы преобразования, относительно которых оно инвариантно. Поскольку вариация бозона должна быть фермионом, закон преобразования должен иметь вид: $\delta e \sim \bar{\varepsilon}\psi$. Возможно лишь несколько вариантов:

$$\delta e_\mu{}^m = \bar{\varepsilon}\gamma^m\psi_\mu, \qquad \text{или} \quad \bar{\varepsilon}\gamma_\mu\psi^m, \qquad \text{или} \quad \varepsilon_\mu{}^{mkl}\bar{\varepsilon}\gamma_5\gamma_k\psi_l\,. \tag{17}$$

Что касается закона преобразования гравитино, то тут мы сталкиваемся с дилеммой. С одной стороны, мы утверждали, что $\delta\psi_\mu = \partial_\mu\varepsilon + \ldots$. С другой стороны, на основе глобальной суперсимметрии мы ожидаем, что $\delta F \sim \partial B\varepsilon$, т.е. $\delta\psi \sim \partial e\varepsilon$. Оказывается, что *и то и другое правильно!* В самом деле, рассмотрим сначала более простой случай теории Янга – Миллса, где $\delta W_\mu^a = \partial_\mu\Lambda^a + f^a{}_{bc}W_\mu{}^b\Lambda^c$. Однородный член отвечает инвариантности относительно преобразований с постоянным параметром Λ, тогда как член $\partial_\mu\Lambda$ связан с локальной калибровочной инвариантностью свободной теории поля (т.е. максвелловского действия). В полной теории должна иметь место инвариантность относительно комбинации обоих преобразований, что достигается ковариантизацией $\partial_\mu\Lambda^a$. Аналогично, "ковариантизуя" $\delta\psi_\mu = \partial_\mu\varepsilon$ в супергравитации, получаем

$$\delta\psi_\mu = \frac{1}{k}D_\mu\varepsilon = \frac{1}{k}\left(\partial_\mu\varepsilon + \frac{1}{2}\omega_\mu{}^{mn}\sigma_{mn}\varepsilon\right). \tag{18}$$

Мы узнаем здесь оба отмеченных выше члена: член $\partial_\mu\varepsilon$ отвечает локальной симметрии свободного действия для гравитино, а линеаризованная часть связности $\omega(e,\psi)$, имеюшая вид $\omega(e)_{\text{лин}} \sim \partial e$, приводит к члену типа $\delta F = \partial B\varepsilon$.

Окончательно установить закон преобразования репера можно разными путями, которые, однако, все приводят к одинаковому результату.

1. Мы можем воспользоваться калибровочной теорией супергрупп, согласно которой все калиброзочные поля преобразуются как ковариантные производные от параметров.

2. Мы можем потребовать инвариантности действия. Подстановка $\delta\psi_\mu \sim D_\mu \varepsilon$ в $D_\rho\psi_\sigma$ приводит к коммутатору двух ковариантных производных, а значит, к тензору кривизны. Общее выражение для вариации имеет вид: $\bar{\varepsilon}\gamma\cdot\psi.\ R\ldots$ (точками обозначены индексы), и зависит лишь от *свертки тензора Римана*, т.е. пропорционально тензору Эйнштейна $G_{\mu\nu}$. Так как вариация действия Гильберта тоже пропорциональна $G_{\mu\nu}$ мы можем найти вариацию $\delta e_\mu{}^m$, при которой полное действие инвариантно.

3. Мы можем потребовать, чтобы коммутатор двух локальных суперсимметрий, действующий на тетраду, содержал лишь сумму локальных симметрий, но не члены типа правой части уравнений поля для тетрады. (В общем случае члены, пропорциональные уравнениям поля, имеются лишь в антикоммутаторе $\{Q, Q\}$, примененном к фермионам.)

В результате мы получаем

$$\delta e_\mu{}^m = \frac{k}{2}\bar{\varepsilon}\gamma^m\psi_\mu. \tag{19}$$

Далее мы можем попытаться найти вспомогательные поля для простой супергравитации, потребовав, чтобы выражение $\{Q, Q\}\psi$ не содержало членов типа уравнений поля для гравитино. В настоящее время известно несколько наборов вспомогательных полей, простейший из которых состоит из скаляра S, псевдоскаляра P и аксиального вектора A_m. Они входят в действие в виде комбинации

$$\frac{e}{3}(S^2 + P^2 - A_m^2), \tag{20}$$

а их вариации под действием суперсимметрии пропорциональны уравнениям поля для гравитино. (При этом *коммутатор* двух Q-преобразований имеет одинаковую структуру как при действии на тетраду, так и на гравитино, и не содержит членов, пропорциональных уравнениям движения для гравитино.)

Резюме. Ввиду того что свободный член в действии для бозонов содержит на одну производную больше, чем свободный член в действии для фермионов, два последовательных преобразования локальной суперсимметрии приводят к общекоординатному преобразованию. Поскольку поле со спином 3/2 есть калибровочное поле суперсимметрии, становится ясной причина неудачи предыдущих попыток построить взаимодействующую теорию для поля со спином 3/2: игнорировалась гравитация. (Это говорит о том, что при рассмотрении поля со спином 5/2 следует учесть его взаимодействие не только с полем спина 2, но и с полем спина 3.) Калибровочное действие дается просто суммой действия Гильберта, отвечающего полю спина 2, и действия Рариты – Швингера, отвечающего полю спина 3/2 (ввиду наличия фермионов первое действие выражается через репер и спиновую связность, а не через метрику и связность $\Gamma_{\mu\nu}{}^\rho$). Спиновая связность является функцией репера и гравитино, которая удовлетворяет алгебраическому уравнению поля, соответствующе-

му связности. Действие и законы преобразования, выраженные через связность $\omega_\mu{}^{mn}(e, \psi)$, имеют компактный (и очень простой) вид.

Для того чтобы коммутаторы трех локальных симметрий (а именно, общекоординатной инвариантности, локальной лоренцевой инвариантности и локальной суперсимметрии) снова выражались через комбинацию этих локальных симметрий без членов, пропорциональных уравнениям поля, и были универсальными для всех полей ($e_\mu{}^m$, $\psi_\mu{}^a$, S, P, A_m), на которые эти коммутаторы действуют, следует ввести минимальный набор вспомогательных полей S, P, A_m. В действительности имеется несколько альтернативных наборов вспомогательных полей, введение которых приводит к замыканию калибровочной алгебры супергравитации с $N = 1$. Что касается теорий расширенной супергравитации, то вспомогательные поля известны лишь для "обычной" супергравитации с $N = 2$ и для конформной супергравитации с $N \leqslant 4$ в четырех измерениях. В настоящее время предпринимаются (пока безуспешные) попытки найти набор вспомогательных полей для супергравитации с $N = 8$. Суть вопроса не в том, как выглядит этот набор (что само по себе есть сложная техническая задача), а в том, существует ли он вообще.

§ 2. Алгебры Клиффорда в d измерениях

Для описания гравитино и полей со спином 1/2 в d измерениях необходимо использовать соответствующие матрицы Дирака. Они образуют алгебру Клиффорда

$$\{\Gamma_m, \Gamma_n\} = 2\delta_{mn}, \qquad m, n = 1, \ldots, d. \tag{1}$$

Произведения Γ_m образуют конечную группу из 2^{d+1} элементов: $\pm I$, $\pm\Gamma_m$, ..., $\pm\Gamma_1 \ldots \Gamma_d$. Матрицы $\pm\Gamma_m$ не являются независимыми в алгебре, но с групповой точки зрения, для которой существенны лишь произведения, они независимы. Поскольку всякое представление конечной группы можно сделать унитарным с помощью преобразования подобия, мы можем считать все матрицы Γ_m унитарными. Тогда в силу равенства $\Gamma_m \Gamma_m = I$ все Γ_m являются эрмитовыми. [Мы могли бы принять, что одна из матриц Γ_m удовлетворяет соотношению $\Gamma_0^2 = -I$. Но удобнее не делать этого, используя евклидову метрику Паули. Тогда оператор Дирака имеет вид $\gamma_1\partial_x + \gamma_2\partial_y + \gamma_3\partial_z + \gamma_4\partial/\partial(ict)$, $\gamma_m \equiv (\Gamma_m)_{d=4}$.]

Сколько существует неэквивалентных представлений группы, генерируемой алгеброй Клиффорда в d измерениях? Чтобы ответить на этот вопрос, можно воспользоваться тремя простыми теоремами теории конечных групп:

1) число неприводимых представлений равно числу классов [1];

2) порядок группы равен сумме квадратов размерностей всех неприводи-

---

[1] Здесь имеются в виду классы сопряженных элементов, т.е. совокупности элементов группы, коммутирующих с фиксированными элементами (задающими классы). — *Прим. перев.*

мых представлений:

$$g = \Sigma\,(d_\alpha)^2;$$

3) число одномерных неприводимых представлений группы G равно порядку группы G, деленному на порядок коммутаторной подгруппы $C(G)$ (группы, порождаемой всеми элементами типа $aba^{-1}b^{-1}$).

Четные размерности. Число классов равно $2^d + 1$ ($+I$ и $-I$ суть два разных класса). Порядок $C(G)$ равен двум, а именно $C(G) = \{+I, -I\}$. Следовательно,

$$g = 2^{d+1} = 2^d(1)^2 + (d_\alpha)^2 \quad \text{и} \quad d_\alpha = 2^{d/2}. \tag{2}$$

Таким образом, имеется лишь одно неприводимое представление, которое не является одномерным.

Нечетные размерности. Число классов теперь равно $2^d + 2$. Это связано с тем, что $+\Gamma_1 \ldots \Gamma_d$ и $-\Gamma_1 \ldots \Gamma_d$ коммутируют со всеми Γ_m, т.е. со всеми элементами группы, а значит, каждый из этих элементов порождает класс. Вновь $C(G) = 2$, так что $g = 2^{d+1} = 2^d(1)^2 + (d_{\alpha_1})^2 + (d_{\alpha_2})^2$. (3)

Имеются *два* точных неприводимых представления с одинаковой размерностью $2^{[d/2]}$. Их легко описать, рассмотрев элементы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{d-1}$, отвечающие исследованному выше случаю нечетного d. А именно, в d измерениях первые $d-1$ матриц Γ_i совпадают с матрицами Γ_i в $(d-1)$ измерениях; последняя же матрица равна $\Gamma_d = \pm\alpha\Gamma_1 \ldots \Gamma_{d-1}$, где $\alpha = \pm i$ или $\alpha = \pm 1$. То, что эти два представления неэквивалентны, следует из леммы Шура: если $S\Gamma_i S^{-1} = \Gamma_i$ при $i = 1, \ldots, d-1$, то S коммутирует со всеми элементами группы G в $(d-1)$ измерениях, т.е. $S = I$, а значит, $S\Gamma_d S^{-1}$ не может совпасть с $-\Gamma_d$. Изменение знака перед матрицей, представляющей Γ_d, с точки зрения физика означает изменение знака *одной* из координат, что есть тривиальная операция в пространстве нечетной размерности.

Все одномерные представления группы противоречат алгебре. Остаются лишь $2^{[d/2]}$-мерные представления, которые являются точными. (Доказательство: если бы они не были точными, то существовал бы элемент, не равный тождественному, представленный единичной матрицей. Тогда представление было бы приводимым, так как его характер не был бы ортогонален единичному характеру.)

В каких измерениях можно определить вейлевские, майорановские или майорана-вейлевские спиноры? Вейлевский спинор может быть в принципе определен лишь при четном d и удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{2}(1 + \Gamma_{d+1})\lambda = \lambda \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}(1 - \Gamma_{d+1})\lambda = \lambda, \tag{4}$$

где $\Gamma_{d+1} = \Gamma_1 \ldots \Gamma_d$. В первом случае λ называется правым, а во втором — левым спинором. Вейлевский спинор, заданный в начальный момент времени $t = 0$, остается вейлевским спинором и при $t > 0$ лишь в отсутствие массы у спинорного поля, так как пространственная часть оператора Дирака

коммутирует с $(1 \pm \Gamma_{d+1})$ в случае четного d. Таким образом, вейлевские спиноры существуют лишь в пространствах четного числа измерений и лишь в безмассовом случае. Фаза Γ_{d+1} фиксируется условием: $(\Gamma_{d+1})^2 = \pm 1$.

Майорановски-сопряженный к λ спинор, обозначаемый через $\bar{\lambda}_M$, образован линейной комбинацией компонент λ^a, которая преобразуется как дираковски-сопряженный спинор. Компоненты последнего, обозначаемые через $(\bar{\lambda}_D)_a$, пропорциональны компонентам спинора $(\lambda^\dagger)_a$ и удовлетворяют требованию инвариантности произведения $\bar{\lambda}_D\lambda$ относительно преобразований Лоренца. Под действием этих преобразований $\delta\lambda = \frac{1}{2}\omega^{mn}\sigma_{mn}$, где ω – инфинитезимальный параметр, а $\sigma_{mn} = \frac{1}{4}[\Gamma_m, \Gamma_n]$, (в наших обозначениях ω^{i4}, будучи, подобно ict, четвертой компонентой, есть чисто мнимое число). Как уже было сказано, все матрицы Γ_m являются эрмитовыми, так что $\bar{\lambda}_D = \lambda^\dagger \Gamma_4$ и

$$\delta\bar{\lambda}_D = \bar{\lambda}_D\left(-\frac{1}{2}\omega^{mn}\sigma_{mn}\right), \delta\bar{\lambda}_M = \bar{\lambda}_M\left(\frac{-1}{2}\omega^{mn}\sigma_{mn}\right), \bar{\lambda}_M = \lambda^T C. \tag{5}$$

Матрица C называется матрицей зарядового сопряжения.

Отметим, что в представлении группы Лоренца типа(1/2, 0) эрмитово сопряжение элементов группы не эквивалентно их обратным элементам, так что отсутствует возможность построения билинейного инварианта. Для построения инварианта следует добавить элементы дуального пространства, преобразующиеся по сопряженному представлению $((R)^\dagger)^{-1}$, т.е. по представлению (0, 1/2). Таким образом, в 4 (и только в 4) измерениях мы фактически имеем дело с приводимым представлением. Уравнение Дирака, очевидно, смешивает оба типа пространств.

Чтобы обеспечить одинаковый закон преобразования $(\bar{\lambda}_D)_a$ и $(\bar{\lambda}_M)_a$, следует потребовать выполнения равенств

$$(\bar{\lambda}_M)_a = (\lambda^T)^b C_{ba}, \qquad C\sigma_{mn}C^{-1} = -\sigma_{mn}{}^T. \tag{6}$$

Более сильным ограничением является требование, что спинор $\bar{\lambda}_M$ удовлетворял тому же уравнению Дирака (или Рариты–Швингера, или...), что и $\bar{\lambda}_D$. Легко показать, что в этом случае справедлива следующая теорема.

Теорема. Для *безмассовых* спиноров: $C\Gamma_m C^{-1} = \pm \Gamma_m{}^T$;

(6 а)

для массивных спиноров: $C\Gamma_m C^{-1} = -\Gamma_m{}^T$.

Таким образом, в случае безмассовых спиноров имеется дополнительный произвол в выборе знака (как и в случае вейлевских спиноров). Этот дополнительный произвол позволит нам доказать, что майорановские спиноры могут существовать при числе измерений $d = 8$ и $d = 9$. Как следует из леммы Шура, матрица зарядового сопряжения C находится однозначно с точностью до мультипликативной константы.

Рассмотрим следуюшие определения:

$$C_+\Gamma_m C_+^{-1} = \Gamma_m{}^T, \qquad C_-\Gamma_m C_-^{-1} = -\Gamma_m{}^T. \tag{7}$$

В случае четного числа измерений допустимы обе матрицы C_+ и C_-, так как

$+\Gamma_m{}^T$ и $-\Gamma_m{}^T$ порождают ту же конечную группу, что и Γ_m (другими словами, одинакова таблица группового умножения). В случае же нечетного числа измерений $d=2n+1$ допустима лишь одна из матриц C_+ или C_-: Γ_{2n+1} пропорциональна $\Gamma_1 \ldots \Gamma_{2n}$, так что обе матрицы C_+ и C_-, отвечающие значению $d=2n$, приводят к одинаковому результату для $C\Gamma_{2n+1}C^{-1}$. Например, при $d=3$ матрицы Дирака совпадают с матрицами Паули, удовлетворяющими равенствам $C_-\tau_i C_-^{-1} = -\tau_i{}^T$, где $C_- = \tau_2$, а матрица C_+ не существует.

Итерируя (7), можно установить еще одно свойство матрицы зарядового сопряжения. На основании леммы Шура получаем: $C_+ = \alpha C_+{}^T$ (и аналогичное соотношение для C_-). Повторная итерация приводит к $\alpha^2 = 1$. Таким образом, *матрицы C_+ и C_- либо симметричны, либо антисимметричны.*

Описав операцию майорановского сопряжения, определим теперь майорановский спинор.

Определение. Майорановский спинор есть спинор, для которого дираковски-сопряженный спинор пропорционален майорановски-сопряженному, т.е. $\bar\lambda_M = \alpha\bar\lambda_D$. Это означает, что майорановскому спинору отвечает вдвое меньшее число компонент и состояний, чем дираковскому спинору. Таким же свойством обладает и вейлевский спинор. Итерируя соотношение $\bar\lambda_M = \alpha\bar\lambda_D$, мы находим условие для матрицы зарядового сопряжения:

$$|\alpha|^2\Gamma_4^*(C^{-1})^*\Gamma_4 C^{-1} = I. \tag{8}$$

Очевидно, что в этом условии не существенны фазы матриц α и C. Как мы увидим ниже, оно может выполняться лишь при определенных значениях размерности пространства. По данной причине майорановские спиноры не могут быть определены в пространстве произвольного числа измерений.

Дадим теперь определение майорана-вейлевского спинора. Это спинор, одновременно удовлетворяющий соотношениям $\bar\lambda_M = \alpha\bar\lambda_D$ и $\lambda = \frac{1}{2}(I+\Gamma_{d+1})\lambda$ (в последнем соотношении может быть знак минус). Напомним, что фаза матрицы Γ_{d+1} фиксирована в силу равенства $(\Gamma_{d+1})^2 = 1$ (которое может быть получено итерацией условия Вейля). Следовательно, определение майорана-вейлевских спиноров в четном числе измерений возможно лишь в том случае, если в дополнение к условию Майораны выполняется равенство

$$C^{-1}\Gamma_{d+1}{}^T C = \Gamma_4\Gamma_{d+1}^+\Gamma_4. \tag{9}$$

Как мы увидим, это соотношение не зависит от выбора представления Γ-матриц и может выполняться лишь в пространствах определенной размерности.

Прежде чем двигаться дальше, исследуем вопрос об изменении приведенных выше условий и вида матрицы зарядового сопряжения под действием преобразования подобия матриц Дирака. Другими словами, мы хотим выяснить, зависит ли условие (8) и, в частности, свойство (анти)симметрии матрицы C от выбора используемого представления. Ограничимся унитарными преобразованиями базиса $\Gamma_m \to \Gamma_m' = U\Gamma_m U^{-1}$, оставляющими матрицы Γ_m эрмитовыми. Из условия $C\Gamma_m = \Gamma_m{}^T C$ (или $-\Gamma_m{}^T C$), выполняющегося при всех m, мы заключаем,

что $C \to C' = (U^{-1})^T C U^{-1}$. Следовательно, если матрица C является симметричной (или антисимметричной) в определенном представлении матриц Дирака, то она является такой и во всех других представлениях. Точно так же и условие Майораны (8) не зависит от выбора представления. Ценность этих результатов в том, что они позволяют без потери общности исследовать матрицы Дирака и C в d измерениях, используя какое-то конкретное представление.

Некоторые представления особенно удобны. *Майорановское представление* есть представление матриц Дирака, в котором матрица Γ_4 чисто мнимая, а все остальные Γ-матрицы действительны (напомним, что в наших обозначениях все матрицы Γ_m эрмитовы). В этом случае оператор Дирака является действительным и, следовательно, действительная и мнимая части спинора по отдельности удовлетворяют уравнению Дирака. Из равенства $\bar{\lambda}_M = \alpha \bar{\lambda}_D$ следует, что $C = \alpha \Gamma_4$, а значит, в майорановском представлении условие Майораны (8) выполняется автоматически. Мы будем называть представление действительным, если действительны все Γ_m (и точно так же определяется чисто мнимое представление).

Выясним теперь, при каких значениях размерности d в интервале от $d = 4$ до $d = 11$ существуют майорановские или майорана-вейлевские спиноры. Для этого мы построим явные представления соответствующих алгебр Клиффорда, проверяя в каждом случае выполнение условий (8) и (9).

$d = 4$. Здесь существует майорановское представление, например:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_1 \\ i\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_m = \gamma_m. \tag{10}$$

Матрица Вейля $\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_3 \\ i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$ является чисто мнимой, а значит (что, впрочем, хорошо известно), при $d = 4$ имеются либо майорановские, либо вейлевские спиноры, но нет майорана-вейлевских спиноров. В этом представлении $C_+ = \gamma_4 \gamma_5$ и $C_- = \gamma_4$.

$d = 5$. $C^{(5)} = C_+^{(5)} = \gamma_4 \gamma_5$. Здесь майорановские спиноры существуют только в том случае, когда у спиноров имеются внутренние индексы a и выполняется соотношение

$$(\bar{\lambda}_M)^a = \lambda_b C \Omega^{ab}, \qquad \Omega^* \Omega = -I. \tag{11}$$

Эти матрицы Ω используются в супергравитации с $N = 8$, $d = 5$, где группа внутренней симметрии есть $USp(8)$.

$d = 7$. В этом случае имеется чисто мнимое представление

$$\Gamma_m^{(7)} \equiv \{\sigma_2 \otimes \gamma_1,\ \sigma_2 \otimes \gamma_2,\ \sigma_2 \otimes \gamma_3,\ I \otimes \gamma_4,\ i\sigma_1 \otimes \gamma_4\gamma_5,\ i\sigma_3 \otimes \gamma_4\gamma_5,\ I \otimes \gamma_5\} \quad (12)$$

(здесь γ_k – обычные γ-матрицы 4×4). Как легко видеть, матрица зарядового сопряжения равна единичной, $C = I_8$, т.е. является симметричной. Следовательно, матрицы Дирака при $d = 7$ являются антисимметричными и $C = C_-$. Ввиду того что $\Gamma_m^* = -\Gamma_m$, при $d = 7$ не существует майорановских спиноров.

$d = 6$. Отбрасывая $I \otimes \gamma_5$ в (12), получаем

$$C_-^{(6)} = I_8,\ C_+^{(6)} = \gamma_5 \otimes I_2,\ C_\pm^{(6)\,T} = \mp C_\pm^{(6)}. \quad (13)$$

Майорановские спиноры не существуют ни для $C_-^{(6)}$, ни для $C_+^{(6)}$.

$d = 9$. Действительное представление имеет вид

$$\Gamma_m^{(9)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -i\Gamma_k^{(7)} \\ i\Gamma_k^{(7)} & 0 \end{pmatrix} I_8 \otimes \sigma_2,\ I_8 \otimes \sigma_3 \right\}. \quad (14)$$

Следовательно,

$$C^{(9)} = C_+^{(9)} = I \quad \text{и} \quad C^{(9)\,T} = +C^{(9)}. \quad (15)$$

Так как все матрицы Дирака действительны, не имеет значения, какая из них используется в качестве "Γ_4" в определении $\bar{\lambda}_D = \lambda^\dagger \Gamma_4$. Таким образом, *майорановские спиноры существуют при* $d = 9$.

$d = 8$. Опустив в (14) $I_8 \otimes \sigma_3$, имеем

$$C_+^{(8)} = I_{16} = C_+^{(8)\,T}, \qquad C_-^{(8)} = I_8 \otimes \sigma_3 = C_-^{(8)\,T}. \quad (16)$$

Следовательно, мы можем определить майорановский спинор, используя $C = C_+^{(8)}$. Мы можем также определить вейлевский спинор $\lambda = (I_{16} + I_8 \otimes \sigma_3)\lambda$, который, однако, не будет майорановским: *при* $d = 8$ *имеются либо майорановские, либо вейлевские спиноры.*

$d = 11$. Определим матрицы Дирака следующим образом:

$$\Gamma_m^{(11)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \Gamma_k^{(9)} \\ \Gamma_k^{(9)} & 0 \end{pmatrix} I_{16} \otimes \sigma_3,\ I_{16} \otimes \sigma_2 \right\}. \quad (17)$$

Это – майорановское представление, в котором "Γ_4" в $\bar{\lambda}_D$ есть $I_{16} \otimes \sigma_2$. Стало быть, существуют майорановские спиноры. Матрица C является антисимметричной:

$$C^{(11)} = C_-^{(11)} = I_{16} \otimes \sigma_2 = -C^{(11)\,T}. \quad (18)$$

$d = 10$. Выберем в качестве аналога Γ_{d+1} в условии Вейля действительную матрицу $I_{16}\otimes\sigma_3$, а в качестве аналога "Γ_4" – матрицу $I_{16}\otimes\sigma_2$. В этом случае

$$C_-^{(10)} = I_{16}\otimes\sigma_2, \qquad C_+^{(10)} = I_{16}\otimes\sigma_1, \tag{19}$$

так что матрица $C_-^{(10)}$ антисимметричная, а $C_+^{(10)}$ симметричная. Так как представление по-прежнему является майорановским, обе матрицы зарядового сопряжения допускают определение майорановского, вейлевского или майорана-вейлевского спинора.

Случай массивных спиноров и высших спинов

Если спинорные поля являются массивными, то, транспонировав уравнение Дирака, на основании теоремы (6 а) мы придем к выводу, что $C = C_-$, тогда как выбор $C = C_+$ не является допустимым. Итак, для массивных спиноров всегда выполняется соотношение $C\Gamma_m C^{-1} = -\Gamma_m{}^T$.

Аналогичные результаты справедливы для полей со спином 3/2. Например, транспонирование уравнения поля для спина 3/2 приводит к утверждению (6 а).

Замечания

Для вейлевских и майорановских спиноров возможна также чисто теоретико-групповая интерпретация. Рассмотрим неприводимое представление группы, порождаемой алгеброй Клиффорда. Оно является приводимым относительно подгруппы $\pm I$, $\pm\Gamma_m\Gamma_n$, $\pm\Gamma_m\Gamma_n\Gamma_p\Gamma_q$ и т.д. Соответствующие неприводимые представления отвечают вейлевским спинорам.

Пусть φ отвечает представлению клиффордовой группы. Элементы $\varphi + C\bar{\varphi}_D{}^T$ и $\varphi - C\bar{\varphi}_D{}^T$ преобразуются независимо в самих себя. Это означает, что комплексное пространство C^4 распадается на два "неприводимых" *действительных* $R^4 \oplus R^4$. (Простой пример – майорановское представление, для которого $C\bar{\varphi}_D^T = \varphi^*$.) Такие представления отвечают майорановским спинорам. Условием существования майорановских спиноров является равенство $P^2 = P$, где P – проектор, определенный соотношением $P\varphi = \varphi + C\bar{\varphi}_D{}^T$. Это показывает также, что в случае существования майорановских спиноров существует и майорановское представление.

Если матрица Γ_m отвечает неприводимому представлению, то неприводимому представлению отвечает и $\Gamma_m{}^*$. Так как все одномерные неприводимые представления единственны с точностью до преобразования подобия (см. выше), мы имеем $S\Gamma_m{}^* S^{-1} = \Gamma_m$. Следовательно, все неприводимые представления являются псевдодействительными (согласно терминологии теории групп).

Приведенные выше результаты для случаев $d = 8$ и $d = 9$ являются новыми. Существования майорановских спиноров при $d = 9$ можно было заранее ожидать ввиду существования майорана-вейлевских спиноров при $d = 10$.

§ 3. Расширенная супергравитация

Теории расширенной супергравитации содержат несколько полей гравитино. Например, в супергравитации с $N = 2$ имеются один гравитон, два гравитино и один фотон. В этой теории осуществлена мечта Эйнштейна об объединении гра-

витации с электромагнетизмом [5]. Можно построить калибровочный вариант такой теории, в котором фотоны взаимодействовали бы с гравитино не только "неминимально", но и "минимально". В этом случае оказывается, что в действие необходимо добавить космологический член. Пользуясь методом Нётер, можно также ввести взаимодействие между супергравитацией с $N = 2$ и суперсимметричной материей с $N = 2$.

Неприводимые безмассовые представления суперсимметрии с $N = 2$ содержат одно состояние со спиральностью J, два – со спиральностью $J - 1/2$ и одно – со спиральностью $J - 1$. Например, при $N = 2$ мы приходим к мультиплету спиральностей (2, 3/2, 3/2, 1), к которому, чтобы получить состояния со спином 2, 3/2, 3/2, 1, необходимо добавить CPT-сопряженный мультиплет. Эти состояния в точности отвечают полям супергравитации с $N = 2$. Аналогично можно найти состояния векторного мультиплета с $N = 2$, который представляет собой мультиплет с максимальной спиральностью, равной единице. Он включает одно состояние со спином 1, два – со спином 1/2, одно скалярное и одно псевдоскалярное состояния. Соответствующая лагранжева теория поля существует и определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}\bar{\lambda}_i \hat{\partial}\lambda^i - \frac{1}{2}(\partial_\mu A)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu B)^2. \quad (1)$$

Член со вспомогательными полями в этой теории имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{вспом}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}(D^i)^2. \quad (2)$$

Пользуясь методом Нётер, можно построить лагранжиан взаимодействия этой системы полей с полями супергравитации с $N = 2$. Можно также обобщить это взаимодействие на случай произвольного числа векторных мультиплетов с $N = 2$ [6].

Можно предположить, что существует также скалярный мультиплет с $N = 2$, содержащий одну частицу со спином 1/2 и две – со спином 0. Здесь, однако, имеется тонкость, приводящая к удвоению состава скалярного мультиплета с $N = 2$, который в итоге содержит две частицы со спином 1/2, два скаляра A и два псевдоскаляра B. Рассматривая A^i и B^i как $SU(2)$-векторы и пытаясь сохранить лишь два независимых состояния, мы могли бы наложить $SU(2)$-инвариантное условие дуальности $\varphi^i = \pm\varepsilon^{ij}\varphi_j^*$, где $\varphi_i^* = (\varphi^i)^*$ и $\varphi^i = A^i + iB^i$. Но, умножив обе части данного условия на ε_{jk}, легко убедиться, что оно противоречиво (независимо от знака), так как $\varepsilon^{ij}\varepsilon_{jk} = -\delta^i_k$. В теории супергравитации с $N = 8$ скаляры образуют тензор φ^{ijkl} и аналогичное условие дуальности оказывается непротиворечивым (произведение 8-мерных ε-символов положительно). Следовательно, для скаляров с k индексами в случае $2k$-суперсимметрии удвоение состава мультиплетов необходимо всегда, когда $k = 4l + 2$[1].

---

[1] С.Феррара, частное сообщение.

Супергравитации существуют и в высших размерностях, но лишь при $d \leqslant 11$. Причину этого ограничения нетрудно понять. Безмассовые представления N-расширенной суперсимметрии в размерности $d = 4$ состоят из одного состояния со спиральностью J, $\binom{N}{1}$ – со спиральностью $J - 1/2$, ..., и $\binom{N}{N}$ – со спиральностью $J - N/2$. Максимальный мультиплет со спинами $J > 2$ возможен при $N = 8$. Он отвечает супергравитации с $N = 8$, содержащей 8 гравитино. В высших измерениях спиноры имеют большее число компонент. При $d = 11$ спиноры имеют 32 компоненты, что позволяет получить из одного гравитино при $d = 11$ восемь гравитино при $d = 4$. Однако, редукция из $d = 12$ уже приводит к числу гравитино, большему 8. При размерной редукции к $d = 4$ гравитино в размерности $d = 11$ разбивается на 8 гравитино и 56 полей со спином 1/2:

$$\psi_\Lambda{}^A \to \psi_m{}^{ai}(x^\lambda) \oplus \lambda_\alpha{}^{ai}(x^\lambda), \qquad A = 1, \ldots, 32;$$

$$\Lambda = 1, \ldots, 11; \; m = 1, \ldots, 4; \; i = 1, \ldots, 8; \; a = 1, \ldots, 4, \; \alpha = 5, \ldots, 11.$$

Что же касается размерности $d = 12$, то, так как при $d = 12$ нет майорана-вейлевских спиноров, допустимы лишь две "проекции" комплексных спиноров (имеющих 128 компонент), а именно вейлевские спиноры (с 64 компонентами) или майорановские спиноры (тоже с 64 компонентами). В результате редукции мы получаем 16 гравитино при $d = 4$. Отказываясь от предположения, что число гравитино не превышает восьми, мы заключаем, что неприводимые представления алгебры суперсимметрии (суперәлгебры Пуанкаре) должны содержать поля со спином 5/2, а это нежелательно (§ 9).

В размерности $d = 10$ существует теория супергравитации с $N = 2$, которую можно построить путем размерной редукции супергравитации в размерности $d = 11$ (левая и правая части гравитино в размерности $d = 11$ становятся двумя гравитино в размерности $d = 10$). Исходя из такой теории с $N = 2$ и согласованно отбрасывая часть полей (например, полагая левое или правое гравитино равным нулю), мы приходим к супергравитации с $N = 1$ в размерности $d = 10$. Согласованность отбрасывания полей означает, что, полагая равными нулю какие-то поля, нужно полагать равными нулю и поля, входящие в их вариации под действием преобразований симметрии. Нам [24] высказал предположение, что при $d = 10$ существует и другая супергравитация с $N = 2$, содержащая *четырехиндексное антисимметричное тензорное поле* с самодуальной напряженностью. Такая модель пока не построена[1]. За более подробным обсуждением расширенной супергравитации мы отсылаем к статье Креммера в настоящем сборнике (с. 235).

---

[1] Такая теория была построена недавно в работах [25 – 27] как предел "нулевого наклона" теории замкнутых суперструн в размерности $d = 10$. Особенностью этой модели является одинаковая киральность обоих гравитино, а также отсутствие явно лоренц-ковариантного выражения для лагранжиана, несмотря на ковариантность уравнений поля. – *Прим. перев.*

§ 4. Конформная супергравитация

Спустя несколько лет после того как была построена обычная теория супергравитации, Каку, Таунсенд и автор построили теорию, теперь называемую супергравитацией с $N = 1$ [7]. В ее лагранжиан входят лагранжиан Вейля $R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} R^2$; кинетический член с высшими производными для гравитино; лагранжиан Максвелла для векторного поля, а также различные члены взаимодействия. Благодаря в основном работам де Вита с сотр. было установлено, что поля конформной супергравитации являются необходимой составной частью набора полей обычных теорий супергравитации. Основная идея состоит в следующем: рассматривая более широкую группу симметрии, мы можем использовать меньшие мультиплеты полей для реализации локальной алгебры и построения действия. Теории обычной супергравитации могут быть затем построены (работы Даса, Каку, Таунсенда) на основе двух или более мультиплетов конформной супергравитации, а именно калибровочного мультиплета и одного или нескольких мультиплетов материи, с последующей фиксацией конформных симметрий путем выбора некоторых из полей материи и калибровочных полей равными нулю. *После* такой фиксации калибровок приходят к одному большому неприводимому мультиплету, хотя исходными были два неприводимых мультиплета. В итоге помимо обычной зависимости законов локальных преобразований полей материи от калибровочных полей имеется также зависимость *параметров* компенсирующих локальных конформных преобразований (необходимых для сохранения исходного вида калибровочных условий) от калибровочных полей и полей материи. Это приводит к появлению полей материи в законах преобразований калибровочных полей обычной супергравитации. В результате мы получаем полностью неприводимый мультиплет, в котором нельзя выделить приводимый подмультиплет.

Чтобы убедиться в том, что более широкая группа симметрий приводит к более узким мультиплетам, мы рассмотрим следующий пример, принадлежащий де Виту (подробное обсуждение конформной супергравитации может быть найдено в его статье в данном сборнике, с. 187). Лагранжиан массивного векторного мультиплета не имеет калибровочной инвариантности (меньшая группа) и основан на неприводимом мультиплете, содержащем четыре компоненты векторного поля V_μ:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu)^2 - \frac{1}{2} m^2 V_\mu^2 . \tag{1}$$

Заменив поле V_μ полем $V_\mu = A_\mu + (1/m)\partial_\mu \varphi$, мы получим теорию с локальной калибровочной инвариантностью (большая группа), которая основана на двух меньших мультиплетах — триплете A_μ (A_μ есть калибровочное поле) и синглете φ:

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi + m A_\mu)^2 ,$$

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda, \qquad \delta\varphi = -m\Lambda. \tag{2}$$

Эта новая теория аналогична конформной супергравитации. Фиксировав локальную калибровочную инвариантность условием $\varphi = 0$, мы придем к исходной модели (1) (аналогу обычной супергравитации).

Представляет ли конформная супергравитация какой-либо самостоятельный интерес помимо ее важной роли в выяснении структуры обычной супергравитации? Пытаясь ответить на этот вопрос, мы сделаем некоторые замечания спекулятивного характера. Подобно тому как в теории слабых взаимодействий введение калибровочных векторных бозонов позволило избавиться от размерной константы связи (и тем самым сделало теорию перенормируемой), хотелось бы заменить ньютоновскую гравитационную постоянную безразмерной константой связи. Это указывает на возможную роль R^2-теорий. Ввиду того что наличие более широких симметрий увеличивает вероятность сокращений расходимостей в квантовой S-матрице, следует отдать предпочтение конформным теориям типа $R^2_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2$. Использование решеточной регуляризации таких теорий (с единственным размерным параметром – постоянной решетки) может оказаться связующим звеном между теориями Эйнштейна и Вейля. Теории с R^2-лагранжианами являются перенормируемыми, а не конечными[1]. Они также не являются унитарными, но, как подчеркивали Хасслачер, Моттола и Каку, может оказаться, что унитарность восстанавливается в рамках непертурбативного (решеточного) подхода[2].

В перенормируемой теории (конформной) (супер)гравитации можно в принципе найти ренорм-групповую зависимость безразмерной константы связи от энергетического масштаба и, может быть, используя решеточную аппроксимацию, получить зависящую от энергии "ньютоновскую константу" $G(Q^2)$. *Физическая гравитационная постоянная тогда была бы низкоэнергетическим пределом константы* $G(Q^2)$! Далее, можно предположить, что значения всех четырех безразмерных констант связи ("сильной", "слабой", электромагнитной и R^2-гравитационной) совпадают в масштабе великого объединения.

В случае "бегущей" гравитационной постоянной открывается интересная возможность *понижения планковской массы до массы великого объединения.* Обратный вариант – повышение массы великого объединения с 10^{15} ГэВ до значения планковской массы $\hbar^{1/2} G^{-1/2} c^{5/2} \approx 10^{18}$ ГэВ, по-видимому, следует

---

[1] Как было показано в работе [28], теории с локальной конформной симметрией, имеющие ультрафиолетовые расходимости (теория Вейля, конформная супергравитация с $N < 4$), оказываются противоречивыми (неперенормируемыми) в рамках теории возмущений. Необходимым условием непротиворечивости локально (супер) конформной теории является ее конечность. В качестве претендентов на роль конечных суперконформных теорий отметим "неминимальную" конформную супергравитацию с $N = 4$ [29], а также ее "минимальный" вариант, взаимодействующий с четырьмя векторными мультиплетами с $N = 4$ (или с $SU_2 \times U_1$ суперсимметричной теорией Янга – Миллса с $N = 4$) [30]. – *Прим. перев.*

[2] Анализ возможных путей решения проблемы унитарности в R^2-теориях, можно найти, например, в работах [31 – 37]. В частности, в работе [37] приведено претендующее на строгость доказательство унитарности решеточных вариантов R^2-теорий. – *Прим. перев.*

исключить (по крайней мере в рамках стандартной $SU(5)$-модели). С точки зрения общих принципов хотелось бы иметь один, а не два массовых масштаба в физике, но тогда планковская масса, видимо, должна будет уменьшиться на несколько порядков величины. (Такая ситуация вряд ли обрадует феноменологов, которые привыкли не беспокоиться по поводу квантово-гравитационных поправок, работая на масштабе великого объединения.)

Естественно, подобная программа носит весьма спекулятивный характер. Но она сложилась еще несколько лет назад. В то время конформная супергравитация ввиду ее неунитарности в рамках теории возмущений воспринималась весьма скептически. Однако дальнейшее развитие заставило относиться к ней более положительно.

Кратко отметим некоторые особенности конформной супергравитации. Простейшая конформная супергравитация с $N = 1$ содержит одно гравитино, а в N-расширенной конформной супергравитации имеется N гравитино. В кинетический член действия для гравитино входит не одна, а три производные. Соответствующий оператор есть просто проектор спина $3/2$, умноженный на $\Box\hat{\partial}$:

$$\mathcal{L}\,(\text{конформное гравитино}) = \bar{\psi}_\mu \Box P^{3/2}_{\mu\nu}\, \hat{\partial}\, \varphi_\nu\,,$$

$$P^{3/2}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - W_\mu W_\nu - \tfrac{1}{3}\hat{\gamma}_\mu\hat{\gamma}_\nu,\quad \hat{\gamma}_\mu = \gamma_\mu - W_\mu,\quad W_\mu = \partial_\mu \hat{\partial}\Box^{-1}. \tag{3}$$

До появления супергравитации существовало (ложное) мнение, что "последовательная теория поля для спина 3/2 не существует". Фактически же справедливо следующее утверждение: не существует теории поля без высших производных, которая содержала бы *только* частицы со спином 3/2. Обычная супергравитация непротиворечива и не содержит высших производных, однако в ее действие (но не в уравнения поля) входит еще и поле со спином 1/2. Конформная супергравитация тоже формально непротиворечива, и ее действие описывает фермионы лишь со спином 3/2 [1]), но это достигается ценой использования высших производных. Точно так же можно построить непротиворечивые теории поля, описывающие лишь состояния с определенным (сколь угодно большим) спином J, однако в действии этих теорий будет все больше и больше производных.

Конформная супергравитация с $N = 1$ содержит следующие поля: тетраду, одно гравитино и один (аксиальный) вектор. В § 5 мы укажем причины появления этого вектора, а также объясним, почему он должен быть физическим (а не вспомогательным).

В конформной супергравитации с $N = 1$ нет необходимости в добавлении вспомогательных полей! Однако в случае расширенной конформной супергравитации их приходится ввести для замыкания калибровочной алгебры.

---

[1]) Здесь речь идет о состояниях вне массовой оболочки; на массовой оболочке конформному гравитино отвечает не обычная частица со спином 3/2, а "трипольный дух" (аналогично вейлевский гравитон является "дипольным" духом; см., например, [8]). — *Прим. перев.*

§ 5. Подсчет полей и состояний

Действие супергравитации с $N = 1$ описывает два бозонных и два фермионных состояния, т.е. число состояний в ней симметрично по бозонам и фермионам. А как обстоит дело с полями? Взяв в качестве полей $e_\mu{}^m$, $\psi_\mu{}^a$ и вспомогательные поля S, P, A_m, мы находим

$$16\, e_\mu{}^m - 6\ (\text{локальная группа Лоренца}) - 4\ (\text{общекоординатная группа}) = 6\ (\text{Бозе})$$

$$16\, \psi_\mu{}^a - 4\ (\text{локальная суперсимметрия}) = 12\ (\text{Ферми}),\ 6\ \text{вспомогательных полей}\ (S, P, A_m) = 6\ (\text{Бозе}). \tag{1}$$

Мы учли, что в силу калибровочной инвариантности часть полей выпадает из теории. (Выбором калибровки можно исключить столько полей, сколько имеется параметров у группы *локальной* калибровочной симметрии.) Таким образом, мы вновь находим равное число бозонных и фермионных *полей*.

Аналогичная симметрия имеет место для мультиплетов полей материи. Например, полями векторного мультиплета (системы "фотона" и "нейтрино") является вейлевский спинор λ, вектор A_μ и вспомогательное поле D со спином 0. Соответствующее равенство числа полей имеет вид

$$4\ \text{поля}\ \lambda^a = 4\ \text{поля}\ A_\mu - 1\ (\text{калибровочная инвариантность}) + 1\ \text{вспомогательное поле}\ D.$$

При переходе от обычной супергравитации к конформной супергравитации с $N = 1$ лагранжиан Гильберта R заменяется лагранжианом Вейля $R_{\mu\nu}^2 - \frac{1}{3} R^2$, а лагранжиан Рариты – Швингера – лагранжианом с высшими производными и с $\hat{\partial}\Box$ вместо $\hat{\partial}$ в качестве оператора в кинетическом члене (§ 4). Как уже было сказано, в конформной супергравитации с $N = 1$ нет вспомогательных полей (что, в определенной степени, есть случайность, так как в теориях конформной супергравитации с $N \geqslant 2$ вспомогательные поля необходимы). Итак, мы имеем следующие поля: $e_\mu{}^m$, $\psi_\mu{}^a$ и аксиальное векторное поле A_μ. Мы снова получаем равные числа бозонных и фермионных полей:

$$16\, e_\mu{}^m - 6\ (\text{Лоренц}) - 4\ (\text{общекоординатн.}) - 1\ (\text{локальные масштабные преобр.}) = 5\ (\text{Бозе}).$$

$$16\, \psi_\mu{}^a - 4\ (\text{обычная суперсимметрия}) - 4\ (\text{конформная суперсимметрия}) = 8\ (\text{Ферми}), \tag{2}$$

$$4\, A_\mu - 1\ (\text{локальная киральная инвариантность}) = 3\ (\text{Бозе}).$$

В качестве пояснения отметим, что суперконформная группа содержит обычную конформную группу $SU(2,2)$. Последняя включает следующие преобразования: трансляции (с генератором P_m), масштабные преобразования (D), конформные бусты (K_m) и преобразования Лоренца (M_{ab}) [алгебре $SU(2,2)$ отвечают 15 генераторов]. В добавление к преобразованиям конформной группы имеются *две* суперсимметрии, генератор одной из которых ("обычной" суперсимметрии) есть "квадратный корень" из P_m, а генератор другой – "корень" из K_m. Наконец, имеется еще одна бозонная симметрия, отвечающая киральным $U(1)$-преобразованиям.

Перейдем теперь к супергравитации с $N = 2$. Вначале рассмотрим обычную супергравитацию. Она содержит гравитон, два гравитино и один фотон. Следовательно, число бозонных состояний здесь снова равно числу фермионных. Среди вспомогательных полей имеются два спинорных и много бозонных полей, но суммарные числа бозонных и фермионных полей вновь оказываются равными.

Более тонким оказывается вопрос о числе состояний в конформной супергравитации. Как уже говорилось, это теория с высшими производными (кинетический член для гравитона содержит четыре, а для гравитино – три производные). Аналогичные действия с высшими производными для полей со спином 0 или 1/2 можно получить, заменив $\square$ оператором $\square^2$ и $\hat{\partial}$ – оператором $\square\hat{\partial}$. Это приводит к увеличению числа состояний со спином 0 от одного до двух, а со спином 1/2 – от двух до шести. Иными словами, при подсчете состояний оператор $\square^2$ играет роль двух операторов $\square$, а $\square\hat{\partial}$ – трех операторов $\hat{\partial}$ [8]. Правда, как было подчеркнуто в работе [11], такой подсчет не справедлив при наличии калибровочных симметрий. Например, добавив к действию Вейля эйнштейновское действие, умноженное на параметр a, можно доказать, что в спектре полной теории имеются одна массивная и одна безмассовая частица со спином 2(всего $5 + 2 = 7$ состояний). Однако, устремляя a к нулю, мы приходим к новой локальной симметрии (инвариантности относительно масштабных преобразований метрики), которая устраняет одну полевую компоненту, т.е. ровно одно состояние (так как эта симметрия является алгебраической – не содержит производных). В результате мы получаем, что вейлевскому гравитону отвечают 6 (а не 4) состояний. Аналогичные рассуждения справедливы при подсчете числа состояний конформного гравитино: добавляя к действию с тремя производными обычное действие Рариты – Швингера, умноженное на a, мы приходим к следующему спектру (подробнее см. [1, с. 261]): две массивные и одна безмассовая частицы со спином 3/2, т.е. всего $2 \times 4 + 2 = 10$ состояний. В пределе при $a \to 0$ мы находим новую локальную симметрию – конформную суперсимметрию, которая устраняет $4 \times 1/2 = 2$ состояния (множитель 1/2 связан с тем, что фермионам условно отвечает вдвое меньше состояний, чем бозонам). В результате мы получаем 8, а не 6 состояний.

Теперь уже не составляет труда проверить равенство числа бозонных и фермионных состояний в конформной супергравитации с $N = 1$, содержащей лишь поля $e_\mu{}^m$, $\psi_\mu{}^a$ и A_μ:

$$6\,(\text{гравитон}) + 2\,(\text{фотон}) = 8\,(\text{гравитино}). \qquad (3)$$

Что касается конформной супергравитации с $N = 2$, то здесь в добавление к реперу и двум гравитино имеются также четыре векторных поля, являющиеся калибровочными для группы $U(2)$, два майорановских спинора, а также действительное антисимметричное *некалибровочное* тензорное поле. Помимо указанных распространяющихся полей, имеется также одно действительное скалярное вспомогательное поле D. В результате как подсчет компонент полей, так и подсчет состояний приводят к равным числам для бозонов и фермионов. В частности,

мы получаем, что полное число состояний (считая фермионные состояния со знаком минус) равно нулю:

$$6 - 2 \times 8 + 4 \times 2 - 2 \times 2 + 6 = 0. \tag{4}$$

Подсчет состояний для $(R + R^2)$-гравитационного действия был впервые проведен Стелле [9]. Обобшение на случай $(R + R^2)$-теорий супергравитации было дано в работе Феррары, Грисару и автора [10]. Подсчет состояний в конформных моделях (теории Вейля и конформной супергравитации) был проделан Фрадкиным и Цейтлиным [11] с помощью функционального интеграла. Эти же результаты могут быть получены [38] на основе канонического формализма.

§ 6. Какие супералгебры отвечают теориям поля?

Сравним коммутаторы двух преобразований суперсимметрии в глобальном и локальном случаях (предполагая существование вспомогательных полей, обеспечивающих замыкание обеих алгебр). Например, в супергравитации с $N = 1$ мы имеем

$$[\delta_S(\varepsilon_1), \delta_S(\varepsilon_2)] = \delta_T(\xi^\mu), \quad \xi^\mu = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_2\gamma^\mu\varepsilon_1,$$

$$\delta_T(\xi^\mu)\varphi = \xi^\mu\partial_\mu\varphi, \tag{1}$$

$$[\delta_S(\varepsilon_1), \delta_S(\varepsilon_2)] = \delta_{gc}(\xi^\mu) + \delta_S(-\xi^\mu\psi_\mu) +$$

$$+ \delta_L(\xi^\mu\omega_{\mu mn}(e, \psi) + \bar{\varepsilon}_2\sigma_{mn}(S - i\gamma_5 P)\varepsilon_1 + \varepsilon_{mnrs}\xi^r A^s).$$

Очевидно, что структурные константы локальной алгебры (которые в правой части равенств (1) умножены на ε_1 и ε_2) зависят от полей. В этом смысле правильнее говорить о структурных функциях. Более того, *структурные функции могут быть фермионными* (что часто упускается из виду).

В общем случае калибровочную алгебру (или супералгебру) можно рассматривать как обычную глобальную алгебру (или супералгебру) с бесконечно большим числом постоянных параметров: n для каждой точки x^μ. Стало быть, локальная калибровочная алгебра есть глобальная алгебра, взятая в бесконечной "степени", так как она представляет собой бесконечное число копий одной и той же глобальной алгебры. Зависимость структурных констант от полей в нашем случае означает, что в каждой точке x^μ имеется своя глобальная алгебра! Это очень существенное изменение в структуре калибровочных теорий, и можно спросить, неизбежно ли оно? Оказывается, что можно было бы обойтись без него: работая в суперпространстве и не налагая аналога так называемой калибровки Весса – Зумино, мы имели бы в обычном пространстве алгебру с не зависящими от полей структурными константами. Но платой за это было бы огромное увеличение числа компонентных полей в теории. Представляется, что проще (и интереснее!) сохранить зависимость структурных констант от полей.

С математической точки зрения супералгебра определяется набором генераторов (P, Q, M, ...), которые можно разделить на "бозонные" (или "четные") и фермионные (или "нечетные") (так называемая Z_2-градуировка). Скобочные соотношения, как обычно, задающие алгебру, имеют вид

$$[X_\alpha, X_\beta] = X_\gamma f^\gamma{}_{\alpha\beta} \qquad (2)$$

и обязаны сохранять "фермионное число" (два нечетных генератора пропорциональны четному и т.п.). Далее, скобки всегда антисимметричны, исключая случай, когда они вычисляются для двух нечетных генераторов. В этом случае они симметричны. Например, $[Q_\alpha, Q_\beta] = [Q_\beta, Q_\alpha]$, где в данном примере скобки есть антикоммутатор (хотя они не обязаны им быть в общем случае). Наконец, должны выполняться тождества Якоби. Явный вид их легко установить. Например,

$$[Q_\alpha, (Q_\beta, P_\mu)] - [Q_\beta, (P_\beta, Q_\alpha)] + [P_\mu, (Q_\alpha, Q_\beta)] \equiv 0. \qquad (3)$$

Предположив, что произведение генераторов ассоциативно, мы получили бы тождественный нуль. Знаки фиксируются таким образом, что все члены попарно сокращаются. Подставляя (2) в (3), мы находим супераналог тождеств Якоби. Затем легко убедиться, что присоединенное представление действительно есть представление алгебры, и в этом представлении скобки являются либо коммутатором, либо антикоммутатором.

С теоретико-групповой точки зрения новым по сравнению с обычными алгебрами аспектом супералгебр является не их Z_2-градуировка (в конце концов алгебра группы Лоренца также имеет Z_2-градуировку, а именно разделение на вращения и бусты), а свойство симметрии скобок для двух нечетных генераторов. Физикам представляется естественным использовать антикоммутатор для двух фермионных зарядов, но в математической литературе подобная идея раньше отсутствовала. Когда ряд исследователей задались вопросом, может ли алгебра Пуанкаре быть частью более широкой алгебры, содержащей также генераторы внутренних симметрий, они рассматривали лишь коммутаторы и пришли к выводу, что единственный допустимый вариант такого объединения есть взятие прямой суммы трех алгебр (Коулмен и Мандула):

$$(\text{Алгебра Пуанкаре}) \oplus S \oplus A, \qquad (4)$$

где S – полупростая, а A – абелева обычные алгебры Ли. Введя в рассмотрение антикоммутаторы, можно найти расширение алгебры Пуанкаре, являющееся полупростой супералгеброй, содержащей алгебру Пуанкаре как подалгебру. Эта супералгебра имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} &[Q, Q] \sim P + Z, \quad [Q, P] = 0, \quad [P, P] = 0, \\ &[Q, M] \sim Q, \qquad [P, M] \sim P, \quad [M, M] \sim M, \end{aligned} \qquad (5)$$

где Z – генераторы, называемые центральными зарядами ($[Z, P] = [Z, Q] = [Z, M] = 0$).

Представляет интерес также ряд других супералгебр. Супералгебра Лоренца есть $osp(2, C \mid 1)$, где $sp(2, C) \approx sl(2, C)$ есть обычная алгебра Лоренца. Для получения простого представления этой супералгебры с помощью матриц 3×3 достаточно добавить к матрицам из $sp(2, C)$ один лишний столбец и одну лишнюю строку с нулевым угловым элементом (3,3). Элементами третьей строки и третьего столбца определяются нечетные генераторы, а скобочные соотношения задаются с помощью коммутаторов и антикоммутаторов.

С помощью аналогичного 5×5-матричного представления может быть задана супералгебра де Ситтера. В качестве блоков 4×4 следует использовать матричную реализацию генераторов алгебры $sp(4)$ (алгебра $sp(4)$ изоморфна алгебре $so(5)$, а $so(5)$ есть алгебра де Ситтера в четырехмерном евклидовом пространстве). В пятую строку следует поместить *действительный* спинор Q, в пятый столбец – $\bar{Q}^T$, а элемент (5,5) следует снова выбрать равным нулю.

Существуют также супералгебры де Ситтера с внутренними симметриями $O(N)$. Их представление получается расположением блоков, отвечающих $sp(4)$ и $so(N)$ по диагонали, а фермионных генераторов – вне диагонали. Путем сжатия алгебры мы находим супералгебры Пуанкаре с внутренними $o(N)$-подалгебрами [1, с. 279].

Еще один класс супералгебр составляют унитарные супералгебры $su(M \mid N)$. Их матричная реализация условно строится так: $su(N) \times su(M) \times u(1)$ вдоль диагонали и комплексные спиноры вне диагонали.

Интересно, что две классические алгебры из семейства Картана $A(n)$, $B(n)$, $C(n)$, $D(n)$ всегда приводят к одной супералгебре, а именно $osp(2M \mid N)$ или $su(M \mid N)$.

В добавление к указанным ортосимплектическим и унитарным супералгебрам имеются также другие простые супералгебры: несколько бесконечных серий (имеющих непростые бозонные подалгебры) и несколько исключительных супералгебр. Их подробное описание (а также матричные реализации всех перечисленных выше супералгебр) будет дано в книге Б.Де Вита, П.Веста и автора, которая готовится к печати.

Рассмотрим теперь следующий вопрос: существует ли конформная супергравитация в размерностях больше четырех? Супералгебра, лежащая в основе конформной супергравитации, должна иметь структуру

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Мы предполагаем, что бозонные алгебры Ли A и D являются простыми и что A содержит *лишь* пространственно-временные симметрии. (Согласно теореме Коулмена и Мандулы, мы не можем вложить алгебру Пуанкаре и алгебру внутренних симметрий в единую простую алгебру Ли.) Далее, B и C должны содержать фермионные генераторы Q. Тогда из вида коммутатора

$$[\text{Бозонный генератор}, Q] \sim Q. \tag{7}$$

следует, что Q образует представление алгебр A и D. В результате для конформных теорий в d измерениях алгебра A должна иметь то же спинорное представление, что и алгебра $so(d+2)$[$so(d+1)$ в случае теорий, основанных на супералгебре де Ситтера в d измерениях. Заметим, что конформная группа в d измерениях есть $SO(d+2)$, или, точнее, $SO(d+1,1)$]. Например, в 4 измерениях мы имеем $SO(4,2) \sim SU(2,2)$.

Какие супералгебры имеют в качестве A-части в (6) алгебру $\mathrm{spin}(d)$ (образованную лоренцевыми генераторами $(\Gamma_m \Gamma_n - \Gamma_n \Gamma_m)$ в d измерениях)? Некоторые из них хорошо известны. Супералгебры $su(d \mid N)$ с $d = 4$ содержат спинорные представления $SO(6)$, т.е. $SU(4)$, и потому соответствуют N-расширенной конформной супергравитации в 4 измерениях. Другая возможность состоит в использовании алгебры $osp(4 \mid N)$. Здесь пространственно-временной алгеброй является $sp(4) \approx so(5)$, а именно алгебра де Ситтера в 4 измерениях. Следовательно, эти супергруппы отвечают обычной (калибровочной) N-расширенной супергравитации при $d = 4$.

Мы можем также рассмотреть $su(2,2) \approx so(4,2)$ как алгебру де Ситтера в 5 измерениях и использовать $su(2,2 \mid 1)$ для построения простой супергравитации при $d = 5$ (как это было сделано группой авторов из Турина). Наша гипотеза состоит в том, что N-расширенной супергравитации ($N \leqslant 4$) при $d = 5$ отвечает супералгебра $su(2,2 \mid N)$. Мы не знаем, можно ли локализовать $SU(N)$-симметрию в 5 измерениях. Отметим лишь, что путем размерной редукции из $d = 11$ можно установить наличие 15 векторных полей $A_\mu{}^{ab}$. Кроме того, имеются 12 векторов, а именно $6 A_{\mu\nu a}$ (в 5 измерениях антисимметричные аксиальные тензоры эквивалентны векторам, см. § 8) и $6 e_\mu{}^a$. Возможно, что им отвечают центральные заряды.

Что касается $d = 11$, то здесь мы не можем ожидать, что $osp(32 \mid 1)$ будет супералгеброй, лежащей в основе супергравитации с $N = 1$, $d = 11$, так как $sp(32)$ содержит не только супералгебру Пуанкаре в 11 измерениях, но также и внутренние симметрии. Число генераторов этой супералгебры есть $\frac{1}{2}\, 32 \times 33 = 528$; они удовлетворяют соотношению $CMC^{-1} = \pm M^T$ и могут быть реализованы так: $\Gamma_m(11)$, $\Gamma_{mn}(55)$, $\Gamma_{m_1 \ldots m_5}$ (462) (Γ_m — матрицы Дирака в 11 измерениях).

Матрицы Γ_m могли бы соответствовать трансляциям, Γ_{mn} — лоренцевым вращениям, а генераторы с пятью индексами — калибровочному тензорному полю с шестью индексами. Однако в супергравитации с $d = 11$ физический антисимметричный тензор имеет 3 индекса. Можно высказать предположение, что лишь сжатие супералгебры $osp(32 \mid 1)$ будет соответствовать некоторой теории поля. Это означало бы, что нельзя построить калибровочную супергравитацию в 11 измерениях, которая действительно пока что не построена.

Попутно отметим, что $osp(4 \mid N)$, вероятно, может лежать в основе конформной супергравитации в трех измерениях ($Sp(4) = SO(5)$-конформная группа при $d = 3$).

Перечисленными выше случаями исчерпываются все подходящие супералгебры, которые можно было бы использовать. Итак, имеется лишь два семей-

ства супералгебр, $osp(M \mid N)$ и $su(M \mid N)$. Единственная группа среди $SU(N)$, которая имеет векторные представления, эквивалентные spin (M), есть $SU(4)$. Аналогично векторные представления группы $Sp(N)$ эквивалентны $Spin\,(M)$ лишь в случае $Sp(4)$. Наконец, векторные и спинорные представления группы $O(N)$ ни при каком N не являются эквивалентными (хотя при $N = 8$ векторное представление и два спинорных представления имеют одинаковую размерность – 8).

Остается еше одна, "менее вероятная" супералгебра. Бозонный сектор супералгебры $F(4)$ включает алгебру $spin\,(7) \times sl(2,R)$. Алгебра $spin\,(7)$ отвечает 8×8-представлению группы $O(7)$, и, так как $O(7)$ есть группа де Ситтера при $d = 6$, а спиноры в 6 измерениях имеют 8 компонент, супералгебра $F(4)$ может лежать в основе супергравитации при $d = 6$. *Другая возможность* состоит в том, что она связана с конформной супергравитацией при $d = 5$, так как $o\,(7)$ (точнее, $o\,(5,2)$) есть конформная алгебра при $d = 5$ (генераторы Σ_{i6} и Σ_{i7} отвечают генераторам P_i и K_i, а Σ_{67} – генераторам D). Учитывая, что при $d = 5$ существуют лишь комплексные спиноры, имеющие восемь компонент, мы получаем согласование с размером (8×8) матриц из алгебры $spin\,(7)$ [1)].

§ 7. Подход группового многообразия

Подход группового многообразия есть попытка понять взаимоотношение между калибровочными группами и калибровочными теориями. Он состоит в том, что по заданной группе (или супергруппе) строится соответствуюшая калибровочная теория поля. Хотя при таком подходе было рассмотрено много калибровочных групп и был воспроизведен ряд известных теорий поля, пока еше не ясно, можно ли получить подобным же образом все калибровочные теории и всякая ли группа приводит к некой теории поля.

Может оказаться, что такой подход селективен и выделяет некоторые классы теорий. Тогда он мог бы помочь в отборе наиболее интересных теорий. Как мы увидим ниже, особенностью уже выделенных теорий является то, что при их построении используются коэффициенты ν_A, которые удовлетворяют некоторому уравнению когомологии из класса уравнений, впервые рассмотренных Шевалле,

$$D\nu_A + \frac{\delta}{\delta h^A} \Lambda = 0, \tag{1}$$

где Λ – "космологический член" на групповом многообразии. Игнорируя разли-

---

1) Отметим, что в работе [39] было проведено явное построение супералгебр Пуанкаре, де Ситтера и конформной супералгебры с $N = 1$ во всех размерностях ($d = 2, 3, 4, 10, 11, \ldots$), допускающих существование майорановских спиноров. Конформная супергравитация с $N = 1$ при $d = 10$ (и с $N = 4$ при $d = 5$) была построена в работе [40]. При этом, однако, не была установлена связь с соответствующей супералгеброй в 10 измерениях, найденной в работе [39]. – *Прим. перев.*

чие между D и d, можно сказать, что формы ν_A "замкнуты" (если $\Lambda = 0$), но не являются "точными" ($\nu_A \neq Df_A$), так как в противном случае соответствующие действия были бы интегралами от полных дифференциалов. Следовательно, коэффициенты ν_A определены лишь на многообразиях с нетривиальной топологией. Иными словами, подход группового многообразия выделяет лишь те теории, которые имеют какое-то отношение к нетривиальным топологиям.

Суть метода состоит в следуюшем. Первым делом необходимо выбрать некоторую алгебру Ли (отвечаюшую группе G), не обязательно простую или полупростую; она может быть даже супералгеброй. Если алгебра имеет n генераторов, то следует рассмотреть n-мерное пространство, т.е. сопоставить по одной координате каждому генератору. В случае супералгебры некоторые из этих координат будут фермионными. В результате мы получаем групповое многообразие. Следуюший шаг состоит в выборе подгруппы H и размерности d *окончательного* бозонного пространства-времени. При заданной группе G может сушествовать несколько подходяших допустимых кандидатов подгрупп H, но, насколько известно, окончательная теория не зависит от выбора подгруппы. В этом смысле фиксация подгруппы H фактически не является дополнительным ограничением. В то же время теория зависит от размерности d. Например, если мы рассмотрим $G = SU(2,2 \mid 1)$, т.е. суперунитарную группу с бозонной подгруппой $SU(2,2) \times U(1)$, то при $d = 5$ получим простую обычную супергравитацию в пяти измерениях, а при $d = 4$ – простую конформную супергравитацию. (Под "простой" здесь понимается простейшая теория. При $d = 5$ таковой является супергравитация с $N = 2$, так как при $d = 5$ необходимы два спинора для определения майорановского спинора. При $d = 4$ "простой" является супергравитация с $N = 1$.)

Обычно при рассмотрении калибровочных теорий проводят четкое разграничение между калибровочной алгеброй и конкретными динамическими моделями, которые инвариантны или неинвариантны относительно этой алгебры. Так, некий набор полей, например, $e_\mu{}^m$, $\psi_\mu{}^a$, S, P, A_m, реализуюший определенную алгебру, может быть использован для построения весьма различных действий (обычной супергравитации с $N = 1$, или конформной супергравитации с $N = 1$, или суперсимметричных R^2-теорий, или калибровочной супергравитации с $N = 1$ и т.п.). В подходе группового многообразия ситуация является обратной: здесь мы исходим из действия и выводим законы преобразования окончательной теории (теории в d измерениях) на основе законов преобразования основной калибровочной алгебры и действия на групповом многообразии. Следовательно, при таком подходе действие имеет особую важность.

Форма Лагранжа есть d-форма на групповом многообразии, построенная из всех компонент 2-формы кривизны и 1-форм, отвечающих алгебре $G-H$. Кривизна здесь является G-кривизной, т.е. она равна дифференциалу связности плюс члены, квадратичные по компонентам связности, умноженные на структурные константы G. Отвечающие алгебре $G-H$ 1-формы есть 1-формы компонент связности, сопоставленные генераторам G, которые не принадлежат алгебре H. В обшем случае действие имеет вид

$$I = \int_M R^a \wedge R^b \wedge \ldots \wedge h^c \wedge h^d \nu_{ab\ldots cd}. \qquad (2)$$

Многообразие M, по которому ведется интегрирование, есть произвольная (искривленная) d-мерная гиперповерхность в n-мерном групповом многообразии. Хотя M в обшем случае есть гиперповерхность в супермногообразии, она параметризуется d бозонными координатами, т.е. *является бозонной поверхностью.* Тензор $\nu_{a\ldots d}$ строится из численных символов типа дельта-символов Кронекера, матриц Дирака и т.п. В действии могут также иметься члены, не включаюшие кривизны. Они строятся лишь из 1-формы $h^A = Dx^N h_N{}^A$, где индекс A отвечает алгебре $G-H$, и являются аналогами космологического члена Λ, упомянутого выше. Частным случаем (2) является действие, линейное по кривизне:

$$I = \int\limits_M R^A \wedge \nu_A, \tag{3}$$

где ν есть $(d-2)$-форма, построенная из h^A, причем индекс A отвечает алгебре $G-H$. Теперь следует потребовать, чтобы действие было инвариантно относительно подгруппы H. Это эквивалентно требованию, чтобы Λ, ν_A и $\nu_{a\ldots d}$ были H-инвариантными тензорами. Мы не можем потребовать калибровочной инвариантности действия относительно группы G – это привело бы к тривиальной (точной) форме Лагранжа. В данном пункте мы явно нарушаем группу G до подгруппы H, что необходимо для последуюшего отождествления фактор-пространства G/H с физическим пространством R^d. Итак, действия строятся лишь с помошью внешних производных и H-инвариантных тензоров. Замечательным обстоятельством является отсутствие дуальных форм: они не могут быть введены на d-мерной гиперповерхности в n-мерном пространстве.

Тем, что используются дифференциальные формы, автоматически обеспечивается инвариантность теории относительно диффеоморфизмов (т.е. обшекоординатных преобразований) на групповом многообразии. Вследствие этого действия являются инвариантными относительно двух типов локальных симметрий: диффеоморфизмов и калибровочных преобразований из подгруппы H. Первый тип преобразований может быть записан так:

$$\delta h^A = (D\varepsilon)^A + \varepsilon^B h_B{}^N R_{NM}{}^A dx^M, \tag{4}$$

т.е. имеет вид суммы G-калибровочного преобразования и члена, включаюшего кривизну. Параметр ε^B связан с параметром диффеоморфизма ξ^N соотношением $\varepsilon^B \equiv \xi^N h_N{}^B$. Локальные H-калибровочные преобразования есть подкласс G-калибровочных преобразований:

$$\delta h^A = (D\varepsilon)^A = d\varepsilon^A + h^C \varepsilon^B f_{BC}{}^A, \tag{5}$$

где параметр ε^B отличен от нуля лишь тогда, когда B принадлежит подалгебре H.

Упражнение: выведите формулу (4).

Прежде чем идти дальше, рассмотрим один пример. Построим изложенным выше методом эйнштейновскую теорию гравитации в d измерениях. В качестве группы G возьмем группу Пуанкаре в d измерениях. Тогда размерность группового многообразия будет равна $n = d + \frac{1}{2} d(d-1) = \frac{1}{2} d(d+1)$. Фиксировав d-мерную поверхность M, мы можем однозначно найти действие (см. ни-

же), которое построено из 2-формы римановой кривизны R^{ab}, внешне умноженной на произведение $(d-2)$ 1-форм репера $V^C_g \wedge \ldots \wedge V^k$, причем все индексы свертываются с помощью лоренц-инвариантного ε-символа в d измерениях. Данный пример показывает, что значение размерности d не ограничено сверху.

Чтобы получить уравнения поля нужно воспользоваться модификацией вариационного принципа Эйлера – Лагранжа, в рамках которой варьируются как 1-формы связности h^A, так и сама поверхность M. На практике это означает, что мы независимо варьируем по всем n^2 компонентам $h_N{}^A$, не накладывая ограничение, что действие фактически зависит лишь от тех форм $h^A = d_x{}^N h_N{}^A$, у которых dx^N – формы на поверхности M.

Полученные в результате n^2 уравнений поля приводят к задаче Коши, которую в принципе можно решить так же, как и соответствующую задачу об изменении во времени 3-мерной пространственно-подобной гиперповерхности, возникающую в теории Эйнштейна. Разрешимость этой задачи доказывается следующим образом. В силу уравнений поля производные от компонент связности по координатам, не принадлежащим поверхности M (т.е. компоненты кривизны $R_{BC}{}^A$, у которых индексы B или C отвечают генераторам H), являются алгебраическими функциями производных от компонент связности по координатам, принадлежащим M (т.е. компоненты кривизны $R_{BC}{}^A$, у которых B и C отвечают генераторам алгебры $G-H$). Ситуация сходна с тем, что мы имеем в случае уравнения Дирака, которое линейно по $\partial/\partial t$ и для которого заданием ψ на пространственно-подобной гиперповерхности определяется задача Коши. За дальнейшими подробностями мы отсылаем к литературе [12, 13].

Здесь необходимо сделать два дополнительных предположения, которые на первый взгляд кажутся столь слабо ограничивающими, что даже неясно, зачем они нужны. В действительности же это столь жесткие ограничения, что большинство исходных комбинаций (G, H, d) им не удовлетворяет. Эти предположения таковы:

I. Среди решений имеется плоское пространство.

II. Помимо плоского пространства имеются и другие решения.

Плоское пространство задается приравниванием нулю всех компонент кривизны: $R^A = 0$ при всех значениях индекса A, отвечающих группе G. Иными словами, уравнения поля должны тождественно выполняться при подстановке вместо h^A "чистой калибровки". Этому требованию, очевидно, удовлетворяют действия, которые как минимум квадратичны по кривизне. Выбор части действия в виде интеграла от $R^A \wedge \nu_A$ приводит к члену $D\nu_A$ в уравнениях поля (это следует из соотношения $\delta R^A = D\delta h^A$). В результате мы получаем уравнение (1). Ряд интересных математических свойств решений (1) можно найти в приложении ко второй из работ [12]. Уравнением (1) часто фиксируется большинство свободных констант в действии $\int(\Lambda + R^A \wedge \nu_A)$. Дополнительным предположением II, как правило, фиксируются все оставшиеся константы. Учитывая сказанное выше, мы заключаем, что требование, чтобы среди всех решений имелось плоское пространство, приводит к многообразиям с нетривиальной топологией. Известно несколько теорий, в которых плоское пространство есть единственное реше-

ние уравнений поля. В качестве примера можно указать на свободную эйнштейновскую теорию в трех измерениях (в трех измерениях тензор Римана пропорционален тензору Риччи). Особенностью теорий на групповом многообразии является то, что в них подобная ситуация оказывается правилом, а не исключением.

§ 8. Формализм порядка 1,5

Бывают случаи, когда удается решить уравнение для некоторого поля (или набора полей) χ алгебраически. Обозначим решение через $\chi(\varphi)$, где φ – другие поля. Действие на этом решении имеет вид $I(\chi(\varphi), \varphi)$. Варьируя χ как независимое поле и подставляя $\chi(\varphi)$ в соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа, мы получаем тождество. Таким образом

$$\frac{\delta}{\delta\chi} I(\chi, \varphi) \Big|_{\chi=\chi(\varphi)} \equiv 0. \tag{1}$$

Следовательно, варьируя $I(\chi(\varphi), \varphi)$ по φ, мы можем учитывать лишь явную зависимость действия от φ. При этом в качестве $\delta\chi(\varphi)$ мы можем взять любое выражение (т.е. не обязательно то, которое следует из правила дифференцирования сложной функции), так как в силу равенства (1) величина $\delta\chi(\varphi)$ все равно умножается на нуль.

Данное обстоятельство имеет важное практическое значение. Например, действие супергравитации с $N = 1$ зависит от репера, гравитино и спиновой связности. Решая уравнение поля для связности, мы можем выразить ее через $e_\mu{}^m$ и $\psi_\mu{}^a$. Поэтому при варьировании действия мы можем положить $\delta\omega(e, \psi) = 0$ и не варьировать e и ψ, входящие в $\omega(e, \psi)$. Иными словами, варьировать в лагранжиане необходимо лишь те поля, которые отмечены стрелками:

$$\mathcal{L} = -\frac{\overset{\downarrow}{e}}{2} \overset{\downarrow}{e}{}^\mu{}_m \overset{\downarrow}{e}{}^\nu{}_n R_{\mu\nu mn}(\omega) - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \overset{\downarrow}{\bar\psi}_\mu \gamma_5 \overset{\downarrow}{\gamma}_\nu D_\rho(\omega) \overset{\downarrow}{\psi}_\sigma, \tag{2}$$

но не нужно варьировать поля e и ψ, входящие в $\omega_{\mu mn}(e, \psi)$. Найдем вариацию лагранжиана (2) при суперпреобразованиях. Вариации, отвечающие первым трем стрелкам, пропорциональны тензору Эйнштейна. Вариация $\delta\psi_\mu = D_\mu\varepsilon$ приводит к коммутатору двух ковариантных производных, т.е. снова к тензору кривизны. Ввиду того что число индексов у полей мало, мы получаем свернутый тензор кривизны, т.е. снова тензор Эйнштейна. Оба члена, пропорциональные тензору Эйнштейна, взаимно сокращаются при подходящем выборе $\delta e_\mu{}^m$. (Тензор Эйнштейна здесь построен из связности $\omega(e, \psi)$, а не $\omega(e)$.) Остается лишь проварьировать репер, входящий в $\gamma_\nu = e_\nu{}^n \gamma_n$. Вклад этой вариации сокращается с членом, содержащим $D_\mu \gamma^\nu$, который возникает в результате интегрирования по частям члена с $\delta\bar\psi_\mu = D_\mu\bar\varepsilon$. Таким образом, мы очень просто доказали инвариантность действия относительно локальной суперсимметрии. Отметим, что так как мы проводили интегрирование по частям, вариация лагранжиана равна полной дивергенции:

$$\delta\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu [\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar\varepsilon \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma]. \tag{3}$$

Это показывает, что (локальная) суперсимметрия есть именно пространственно-временная, а не внутренняя симметрия. Выражение (3) полезно сравнить с соответствующей вариацией, отвечающей общекоординатным преобразованиям,

$$\delta \mathcal{L} = \partial_\mu(\xi^\mu \mathcal{L}). \tag{4}$$

Изложенный выше формализм порядка 1,5 был предложен несколько лет назад в работе Таунсенда и автора [14][1], в которой они пытались объяснить вывод, сделанный Чамседдином и Вестом [14], что в рамках подхода к супергравитации как к калибровочной теории некоторой супергруппы должно выполняться равенство $\delta\omega_{\mu mn} = 0$. Это равенство, казалось бы, противоречило выражениям для $\delta\omega$, найденным в формализмах первого и второго порядка. Как мы видели, в рамках *формализма второго порядка* правильными являются оба результата $\delta\omega = 0$ и $\delta\omega \neq 0$. Формализм порядка 1,5 есть просто формализм второго порядка, дополненный положением, что в выражении для действия связность $\omega(e, \psi)$ следует рассматривать как единый объект.

Разберем теперь второй пример приложения формализма порядка 1,5 который принадлежит Николаи и Таунсенду [15]. Предположим, что лагранжиан $\mathcal{L}(B, \varphi)$ инвариантен относительно вариаций δB и $\delta\varphi$, причем B входит в $\mathcal{L}$ лишь в виде $\partial_\mu B$. Тогда мы можем заменить $\partial_\mu B$ вектором L_μ, одновременно добавив член с множителем Лагранжа $M_{\mu\nu}$, который гарантировал бы, что L_μ есть градиент:

$$\Delta \mathcal{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} M_{\mu\nu}\, \partial_\rho L_\sigma . \tag{5}$$

Положим по определению, что $\delta L_\mu = \partial_\mu \delta B$. Тогда для вариации действия получим

$$\delta I = \int \frac{1}{2}\, (\partial_\mu L_\nu - \partial_\nu L_\mu) S^{\mu\nu} d^4 x, \tag{6}$$

что согласуется с инвариантностью действия при замене L_μ на $\partial_\mu B$. Выбирая

$$\delta M_{\mu\nu} = -\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, S^{\rho\sigma}, \tag{7}$$

мы заключаем, что действие $I(M_{\mu\nu}, L_\mu, \varphi)$, где через φ обозначены все остальные поля, является при этом инвариантным. Заметим, что вариация L_μ в $\Delta\mathcal{L}$ не дает вклада.

Предполагая, что исходное действие содержит лишь квадратичные и линейные по L_μ члены, мы можем исключить L_μ, решив соответствующее уравнение поля. Решение для L_μ имеет вид

$$L_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, \partial_\nu M_{\rho\sigma} + (\text{Члены, зависящие от } \varphi). \tag{8}$$

Исключив таким образом L_μ из действия, следует забыть о $\delta L_\mu = \partial_\mu \delta B$ и использовать для δL_μ выражение, следующее из выражения (8) при вариации

---

[1] Независимо от названных авторов этот формализм был предложен в работе [41]. — *Прим. перев.*

в нем полей. Это допустимо в рамках формализма порядка 1,5 (см. сказанное в начале данного параграфа).

Итак, используя формализм порядка 1,5, мы заменили скалярное поле полем антисимметричного тензора. Точно так же можно заменить аксиальный вектор вектором в четырехмерном пространстве и антисимметричный тензор $A_{\mu\nu}$ вектором B_μ в пятимерном пространстве. Наконец, можно заменить $A_{\mu\nu\rho}$ "ничем": введя $\Delta\mathcal{L} = \varphi\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_{\nu\rho\sigma}$, мы увидим, что φ является вспомогательным (нераспространяющимся) полем.

В вопросе об эквивалентности теорий, связанных подобными дуальными преобразованиями, нужна осторожность. Они действительно имеют одинаковые S-матрицы [16], но соответствующие им аномалии различны [17]. Это следует из математической теоремы о том, что любая k-форма есть сумма точной, замкнутой *и гармонической* форм. Вклад в аномалии дает лишь гармоническая часть [1].

§ 9. Трудности со спинами, большими 2

Как известно, для полей со спинами 0, 1/2, 1, 3/2 и 2 можно построить согласованные лагранжевы теории поля со взаимодействием. Сначала нужно выбрать полевое представление для состояний со спином J, например φ, $\lambda^a (a = 1, \dots, 4)$, A_μ, ψ_μ^a и $h_{\mu\nu} (= h_{\nu\mu})$. Потребовав, чтобы в свободных теориях поля энергия была положительной, мы получаем следующее: а) *для данного полевого представления действие является единственным*; б) действия для полей со спинами $J \geqslant 1$ должны быть калибровочно-инвариантными. Таким образом, *калибровочная инвариантность следует из требования положительной энергии.*

Для построения взаимодействия между свободными полями можно воспользоваться известным итеративным методом Нётер. Так, мы приходим к спинорной электродинамике, теории Янга–Миллса, гравитации и супергравитации. В случае гравитации такой подход впервые был использован Гуптой и Тиррингом. В рамках супергравитации метод Нётер позволил найти лагранжиан взаимодействия калибровочных полей и полей материи, а также нелинейные члены в самом супергравитационном действии. Эти результаты привели к установлению так называемого тензорного исчисления.

Однако, исследуя поля со спинами больше двух, мы сталкиваемся с трудностями. Рассмотрим случай спина 5/2 и выберем в качестве полевого представления симметричный тензор-спинор $\psi_{\mu\nu}{}^a = \psi_{\nu\mu}{}^a$. Общие соображения относительно выбора полевых представлений для спина J можно найти в работе [18]. Для построения действия мы рассмотрим наиболее общую комбинацию членов типа $\bar{\psi}\partial\psi$, т.е. билинейных по ψ и содержащих одну производную (чертой обозначено дираковское сопряжение). Как и в случае спина 3/2, мы считаем спиноры безмассовыми и действительными. Действительность понимается в

---

[1] В этой связи см. также [45]. — *Прим. перев.*

майорановском смысле: в представлении, в котором действительны γ_1, γ_2, γ_3 и γ_0, действительны и спиноры $\psi_{\mu\nu}$. В произвольном представлении матриц Дирака спиноры $\psi_{\mu\nu}$ не являются действительными, но удовлетворяют условию Майорана. Поэтому мы имеем возможность пользоваться обычными соотношениями типа

$$\overline{\psi}_{\mu\nu}\gamma_\nu\, \partial_\rho\psi_\mu = -\partial_\rho\overline{\psi}_\mu\gamma_\nu\psi_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Теперь потребуем, чтобы энергия была положительной. Технически это делается следующим образом. Используя спиновые проекторы, мы сначала находим оператор, обратный к оператору в кинетическом члене. Затем умножаем соответствующий пропагатор на два внешних источника, которые удовлетворяют *лишь* тем соотношениям, которые следуют из уравнений поля (например, в электродинамике из условия $\partial_\mu F_{\mu\nu}=j_\nu$ мы находим соотношение $\partial_\nu j_\nu = 0$). Хотя исходный свободный пропагатор был сингулярным (т.е. зависел от доопределения), пропагатор, умноженный на источники, является регулярным и однозначным. Требованием, чтобы он имел лишь полюса первого порядка с положительными вычетами, мы полностью фиксируем неопределенные параметры в исходном действии. Окончательный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\,\overline{\psi}_{\mu\nu}\,\hat{\partial}\psi_{\mu\nu} + \overline{\psi}\cdot\gamma_\mu\,(2\partial\cdot\psi_\mu - \hat{\partial}\gamma\cdot\psi_\mu - \partial_\mu\psi) + \frac{1}{4}\,\overline{\psi}\,\hat{\partial}\psi, \tag{2}$$

где

$$\psi = \psi_{\mu\mu},\ \partial\cdot\psi_\mu = \partial_\nu\psi_{\mu\nu},\ \gamma\cdot\psi_\mu = \gamma_\nu\psi_{\mu\nu}. \tag{3}$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно локальных фермионных калибровочных преобразований с майорановским вектор-спинором (со спином 3/2) $\varepsilon_\mu{}^a$ в качестве калибровочного параметра:

$$\delta\psi_{\mu\nu} = \partial_\mu\varepsilon_\nu + \partial_\nu\varepsilon_\mu, \qquad \text{где} \quad \gamma^\mu\varepsilon_\mu = 0. \tag{4}$$

Можно убедиться, что при этом

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} = &-2\overline{\psi}_{\mu\nu}\hat{\partial}\partial_\mu\varepsilon_\nu + \overline{\psi}\cdot\gamma_\mu\,(2\Box\varepsilon_\mu + 2\partial_\nu\partial_\mu\varepsilon_\nu - \\ &-\hat{\partial}\hat{\partial}\varepsilon_\mu - \hat{\partial}\partial_\mu\gamma\cdot\varepsilon - 2\,\partial_\mu\partial\cdot\varepsilon) + (2\overline{\psi}\cdot\partial_\mu - \\ &-\overline{\psi}\cdot\gamma_\mu\hat{\partial} - \overline{\psi}\partial_\mu)\,(\hat{\partial}\varepsilon_\mu + \partial_\mu\gamma\cdot\varepsilon) + \\ &+\overline{\psi}\hat{\partial}\partial\cdot\varepsilon = 0, \qquad \text{если} \quad \gamma\cdot\varepsilon = 0.\end{aligned} \tag{5}$$

В случае кривого пространства должно выполняться соотношение

$$\delta\psi_{\mu\nu} = D_\mu\varepsilon_\nu + D_\nu\varepsilon_\mu, \qquad \gamma^\mu\varepsilon_\mu = 0, \tag{6}$$

и тогда мы находим

$$\delta\mathcal{L} = R(\dots) + R_{\mu\nu}(\dots) + R_{\mu\nu\rho\sigma}(\dots). \tag{7}$$

Многоточием обозначены члены, линейные по ε и $\psi_{\mu\nu}$ и не содержашие производных. Члены, пропорциональные R и $\psi_{\mu\nu}$, могут быть сокрашены путем добавления эйнштейновского лагранжиана (вариация которого пропор-

циональна разности $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R$) и подходящего подбора вариации $\delta e_\mu{}^m$. Сократить же члены, пропорциональные $R_{\mu\nu\rho\sigma}$, не удается.

Упражнение. Подставив (6) в (5), убедитесь в том, что коэффициент при члене с $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ в формуле (7) отличен от нуля.

Действие расширенной теории супергравитации с $N = 2$, которая явилась первым примером расширенной супергравитации и осуществлением мечты Эйнштейна об объединении гравитации с электромагнетизмом, символически можно записать так:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{Эйншт.}} + \mathcal{L}_{\text{Р.Ш.}}(\psi^i, i = 1, 2) + \mathcal{L}\,(\text{фотон}) +$$

$$+ \ (\bar{\psi}\psi\, F\text{-паулиевские члены}) + (\varphi^4\text{-члены}). \tag{8}$$

Таким образом, чтобы взаимодействие полей со спинами 1 и 3/2 было непротиворечивым, нужно ввести гравитон и *два* гравитино. Возможны ли аналогичные рассуждения в случае спина, равного трем? Другими словами, можно ли получить непротиворечивое взаимодействие поля, имеющего спин 5/2, с гравитацией, если ввести поле со спином 3 и построить некую супергравитацию с $N = 2$? С одной стороны, это представляется невозможным, так как в супергравитации с $N = 2$ гравитино не имеет электрического заряда (нет минимального электромагнитного взаимодействия), а поле со спином 5/2 всегда имеет гравитационный заряд (энергию). Но, с другой стороны, мы знаем, что можно построить калибровочную супергравитацию с $N = 2$, т.е. ввести минимальное взаимодействие фотона и двух действительных (или одного комплексного) гравитино, так что все-таки имеется (хотя и весьма малая) вероятность того, что непротиворечивое взаимодействие полей со спинами 3,5/2,2,... существует. Исходя из лагранжиана супергравитации с $N=2$, мы можем ожидать появления членов неминимального гравитационного взаимодействия (типа $\bar{\psi}\psi R$) между полями со спинами 5/2 и 2, так как подобные члены аналогичны паулиевским членам в выражении (8). Имеется много веских доводов в пользу утверждения о невозможности непротиворечивого взаимодействия безмассовых полей, имеющих спин 3, с остальными полями. Но столь же убедительные соображения в свое время высказывались и о невозможности построения непротиворечивого взаимодействия для поля со спином 3/2. Создается впечатление, что интересная проблема построения теории полей высших спинов еще ждет своего решения.

§ 10. Квантование супергравитации

Возможны три подхода к квантованию супергравитации: 1) на основе БРСТ-инвариантности; 2) с использованием континуальных интегралов по фазовому пространству (гамильтонов подход); 3) на основе диаграмм Фейнмана с восстановлением дополнительных вершин, обеспечивающих выполнение требований унитарности и калибровочной инвариантности S-матрицы. Квантовая супергравитация вскрывает ряд интересных моментов, которые не возникают в более простых теориях, таких, как теория Янга – Миллса или обычная теория гравитации: 1) если калибровочная алгебра является открытой (т.е. отсутствуют вспомогательные поля), то для обеспечения унитарности и калибровочной инвариант-

ности теории необходимо ввести члены четвертого порядка по духовым полям; 2) в супергравитации имеются антисимметричные тензорные калибровочные поля; духи, вводимые при фиксации калибровок для этих калибровочных полей, сами являются калибровочными полями, так что необходимы духи для духов и т.д.; 3) в некоторых калибровках, таких, как $\mathcal{L}_{\text{калибр}} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\cdot\gamma\hat{D}\gamma\cdot\psi$, имеется новый тип духов, так называемые духи Нильсена – Каллош; такие духи необходимы всегда, когда в члене, фиксирующем калибровку,

$$\mathcal{L}_{\text{калибр}} = \frac{1}{2} F_\alpha \gamma^{\alpha\beta} F_\beta \tag{1}$$

матрица $\gamma^{\alpha\beta}$ зависит от полей.

Начнем с БРСТ (Беччи – Руэ – Стора – Тютин)-инвариантности. Квантовый лагранжиан в случае не зависящей от полей матрицы $\gamma^{\alpha\beta}$ имеет вид [1]

$$\mathcal{L}_{\text{кв}} = \mathcal{L}_{\text{класс}} + F_\alpha \gamma^{\alpha\beta} d_\beta - \frac{1}{2} d_\alpha \gamma^{\alpha\beta} d_\beta + C^*_\alpha \gamma^{\alpha\beta} F_{\beta,\delta} C^\delta . \tag{2}$$

Символ $F_{\alpha,\beta}$ здесь означает вариацию функции F_α при калибровочном преобразовании с параметром ξ^β, "деленную" на ξ^β. Поля C^δ и C^*_α – это духи Фаддеева – Попова и соответствующие антидухи.

Поля d_α есть духи Нильсена – Каллош. Исключив их из действия с помощью соответствующих уравнений движения $d_\alpha = F_\alpha$, мы вновь получим фиксирующий калибровку член (1). Лагранжиан (2) инвариантен относительно БРСТ-преобразований, которые представляют собой отражение классической калибровочной инвариантности в квантовом лагранжиане. Отвечающий им параметр Λ – постоянный (и антикоммутирующий), т.е. это параметр глобальной, а не локальной симметрии. Законы БРСТ-преобразований имеют вид

$$\begin{aligned} &\delta\varphi^i = R^i{}_\alpha C^\alpha \Lambda, \qquad \delta C^*_\alpha = \Lambda d_\alpha, \\ &\delta C^\alpha = -\frac{1}{2} f^\alpha{}_{\beta\gamma} C^\gamma \Lambda C^\beta, \qquad \delta d_\alpha = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь φ^i – классические калибровочные поля, причем классические калибровочные преобразования записываются в виде $\delta\varphi^i = R^i{}_\alpha \xi^\alpha$. Генераторы $R^i{}_\alpha$ в общем случае зависят от полей φ^i и их производных. Таким образом, закон БРСТ-преобразования φ^i получается заменой ξ^α на $C^\alpha\Lambda$. Для сохранения той же статистики у полей параметр Λ должен быть антикоммутирующим.

БРСТ-преобразования нильпотентны. Интересно отметить, что еще до того, как было установлено, что поле d_α является духом Нильсена – Каллош (возникающим в результате представления детерминанта в виде интеграла по грассмановым переменным, § 11), такое поле вводилось для обеспечения равенства нулю повторной вариации $\delta\delta C^*_\alpha$.

Нетрудно убедиться, что если калибровочная алгебра является замкнутой, лагранжиан $\mathcal{L}_{\text{кв}}$ инвариантен относительно БРСТ-преобразований. Замыкание алгебры означает, что коммутатор двух локальных (классических) калибровочных преобразований полей φ^i при всех φ^i равен сумме локальных калибро-

вочных преобразований, т.е.

$$[\delta(\eta),\delta(\xi)]\varphi^i = R^i{}_{\alpha,j}\, R^j{}_\beta\, \eta^\beta \xi^\alpha - \eta \leftrightarrow \xi =$$

$$= R^i{}_\gamma\, f^\gamma{}_{\alpha,\beta}\eta^\beta \xi^\alpha . \tag{4}$$

Структурные функции $f^\gamma{}_{\alpha\beta}$ *в общем случае зависят от* φ^i. Таким образом, для доказательства нильпотентности БРСТ-преобразований на C^α необходимо воспользоваться обобшением тождества Якоби на случай, когда $f^\alpha{}_{\beta\gamma,i}$ (т.е. правая вариационная производная $f^\alpha{}_{\beta\gamma}$ по φ^i) отлична от нуля. Исходя из *тождества*

$$\delta(\zeta)[\delta(\eta),\delta(\xi)]\varphi^i - [\delta(\eta),\delta(\xi)]\delta(\zeta)\varphi^i + \text{Цикл. перест. } \zeta,\eta,\xi = 0 \tag{5}$$

и дважды используя соотношение замкнутости алгебры (4), мы получаем

$$\begin{aligned} &R^i{}_\lambda A^\lambda{}_{\alpha\beta\gamma}\zeta^\gamma \eta^\beta \xi^\alpha + \text{Цикл. перест. } \zeta,\eta,\xi = 0,\\ &A^\lambda{}_{\alpha\beta\gamma} \equiv f^\lambda{}_{\alpha\delta} f^\delta{}_{\beta\gamma} + f^\lambda{}_{\alpha\beta,k} R^k{}_\gamma = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Если генераторы локальных калибровочных преобразований линейно независимы, то мы можем опустить множитель $R^i{}_\lambda$. Данное соотношение справедливо для локальных симметрий как бозонного, так и фермионного типа.

Считается, что (как оказалось во всех рассматривавшихся случаях) из БРСТ-инвариантности теории следует ее унитарность[1]. Поэтому требование БРСТ-инвариантности позволяет построить корректное квантовое действие, а следовательно, и корректные правила Фейнмана. Приведенное выше выражение для $\mathcal{L}_{кв}$ может быть найдено также в рамках подхода, основанного на континуальном интеграле. При этом, строго говоря, необходимо воспользоваться формализмом Дирака для систем со связями, найти выражение для интеграла по фазовому пространству (q, p), а затем проинтегрировать по импульсам p. Иногда в погоне за простотой исходят сразу из континуального интеграла по конфигурационному пространству, однако в ряде случаев это приводит к неправильным результатам.

В практических вычислениях для удобства можно диагонализовать члены с F_α и d_α в формуле (2) следуюшим образом:

$$F_\alpha \gamma^{\alpha\beta} d_\beta - \frac{1}{2} d_\alpha \gamma^{\alpha\beta} d_\beta = -\frac{1}{2} d'_\alpha \gamma^{\alpha\beta} d'_\beta + \frac{1}{2} F_\alpha \gamma^{\alpha\beta} F_\beta . \tag{7}$$

---

[1] Такое утверждение, по-видимому, справедливо лишь для теорий без высших производных. Например, квантовое действие в R^2-теории гравитации является БРСТ-инвариантным, однако эта теория не унитарна в рамках теории возмущений. — *Прим. перев.*

Наиболее удобные члены фиксации калибровок в супергравитации имеют вид

$$\mathcal{L}_{\text{калибр}} = \frac{1}{4}\,[\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu})]^2 + \frac{1}{4}\,\bar{\psi}\cdot\gamma\,\hat{\partial}\,\gamma\cdot\psi + \alpha\,(e_{a\mu} - e_{\mu a})^2. \tag{8}$$

В этом случае пропагаторы имеют особенно простую форму. Далее, уже можно приступить к вычислению диаграмм Фейнмана, и тогда оказывается, что в супергравитации *S-матрица* (но не функции Грина) в однопетлевом приближении является конечной [1]. Этот вывод, первоначально сделанный на основе явных вычислений, затем нашел теоретическое обоснование. Аналогичное (теоретическое) доказательство конечности было проведено также в двухпетлевом приближении. Возможно, что супергравитация с $N = 8$ будет конечной и в трехпетлевом приближении (несмотря на сушествование допустимого контрчлена), поскольку равна нулю β-функция в глобально суперсимметричном партнере теории с $N = 8$ – суперсимметричной теории $N = 4$ Янга – Миллса [19]. Отметим также, что однопетлевая S-матрица конечна и в спонтанно нарушенной супергравитации с $N = 8$ [20].

В случае когда $\gamma^{\alpha\beta}$ зависит от полей, можно найти обобшение квантового действия (2), добавляя всевозможные члены с $\gamma^{\alpha\beta}{}_{,i}$, которые имеют правильную размерность и статистику. Ввиду того что калибровочная алгебра не должна зависеть от выбора определенной динамической модели, хотелось бы избежать зависяших от $\gamma^{\alpha\beta}$ и F_α членов в законах БРСТ-преобразований, т.е. оставить вид законов преобразований прежним. Тогда, потребовав инвариантности действия, мы можем зафиксировать коэффициенты при дополнительных членах в действии, пропорциональных $\gamma^{\alpha\beta}{}_{,i}$. Подробности такой процедуры изложены в статье Нильсена [21] и в работе Оре и автора [42] [2]. Результат таков: преобразования (3) остаются неизменными, а квантовое действие определяется полной БРСТ-производной:

$$\mathcal{L}_{\text{кв}} = \mathcal{L}_{\text{класс}} + \frac{\delta}{\delta\Lambda}\left(-\frac{1}{2}\,C^*_\alpha\gamma^{\alpha\beta}d_\beta + C^*_\alpha\gamma^{\alpha\beta}F_\beta\right), \tag{9}$$

где под производной по Λ понимается правая производная. Заметим, что ввиду нильпотентности БРСТ-преобразований мы могли бы добавить к выражению в скобках любые другие члены, не нарушив при этом инвариантности лагранжиана (9) относительно БРСТ-преобразований. Дополнительные члены в лагранжиане, возникаюшие из-за зависимости $\gamma^{\alpha\beta}$ от полей, можно представить в следуюшей форме:

$$\mathcal{L}_{\text{доп}} = C^*_\alpha\gamma^{\alpha\beta}{}_{,i}\,R^i{}_\gamma C^\gamma\left(F_\beta - \frac{1}{2}\,d_\beta\right)(-1)^\gamma. \tag{10}$$

В случае когда $\gamma^{\alpha\beta}$ не зависит от полей, лагранжиан (9) сводится к лагранжиану (2).

---

[1] При подходящем (суперсимметричном) выборе калибровок конечными являются и функции Грина. – *Прим. перев.*

[2] См. также [43]. – *Прим. перев.*

§ 11. Духовые поля в континуальных интегралах

В процессе квантования калибровочных теорий с помощью континуальных интегралов мы сталкиваемся с супердетерминантами, которые (для разложения в ряд теории возмущений) желательно представить в виде интеграла от экспоненты. Напомним, что суперматрица имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где A и D – бозонные, а B и C – фермионные блоки. Супердетерминант может быть записан двумя способами:

$$\operatorname{sdet} M = \det A \, \det (D - CA^{-1}B)^{-1} = \det (A - BD^{-1}C)(\det D)^{-1}.$$

Для доказательства этих формул нужно воспользоваться равенством $\operatorname{sdet} M = \exp(\operatorname{str} \ln M)$ и подходящим образом определить суперслед (str). Исходя из требования, чтобы суперслед удовлетворял равенству $\operatorname{str} MN = \operatorname{str} NM$, мы приходим к определению $\operatorname{str} M = \Sigma(-1)^a M^a_a$, т.е. по фермиевским индексам след берется со знаком минус. Можно доказать, что $\delta(\operatorname{sdet} M) = (\operatorname{sdet} M) \operatorname{str} (M^{-1}\delta M)$.

Суперинтегрирование по фермионным грассмановым координатам определяется равенствами $\int d\theta\, \theta = 1$, $\int d\theta = 0$ [1], вытекающими из требования трансляционной инвариантности интеграла

$$\int d\theta\, f(\theta) = \int d\theta\, f(\theta + a), \tag{2}$$

где $f(\theta)$ – произвольная функция вида $f(\theta) = A + \theta B$ (θ – антикоммутирующая переменная, $\theta^2 = 0$). Можно доказать две следующие теоремы о суперинтегрировании:

$$\text{теорема I: } \operatorname{sdet} M = \int \prod_{k,\,l} dC_2^k \, dC_1^l \exp(C_1^i M_{ij} C_2^j);$$
$$\text{теорема II: } (\operatorname{sdet} M)^{1/2} = \int \prod_k dN^k \exp(N^i M_{ij} N^j), \tag{3}$$

где C_1^k, C_2^k и N^k являются коммутирующими или антикоммутирующими в зависимости от того, являются ли индексы матрицы M_{ij}, с которыми они сворачиваются, фермионными или бозонными. ("У духов противоположная статистика".)

В виде иллюстрации к теоремам рассмотрим сначала случай, когда в матрице M отличен от нуля лишь блок A. В этом случае все переменные C_2^k и C_1^l являются антикоммутирующими, так что вклад в интеграл в теореме I дает лишь тот член в разложении экспоненты, в которой каждый дух входит только

---

[1] Интегралы на грассмановой алгебре были введены Ф.А.Березиным в начале 60-х годов [44]. Они составляют основу математического описания суперсимметрии и супергравитации. – *Прим. ред.*

один раз (члены, не содержащие части духов, равны нулю в силу равенства $\int dC = 0$, а члены, содержашие какой-то дух хотя бы дважды, обрашаются в нуль ввиду равенства $C^2 = 0$). Следовательно, ненулевой вклад дают лишь некоторые из членов в разложении $(C_1^i M_{ij} C_2^j)^n$. Легко убедиться, учитывая грассманов характер переменных C_1 и C_2, что $\det M = \det A$. В случае когда в матрице M отличен от нуля лишь блок D, духи коммутируют, и мы, естественно, заключаем, что интеграл равен $(\det D)^{-1}$. Таким образом, в обоих частных случаях мы получаем sdet M.

Проиллюстрируем теперь теорему II. Мы, конечно, не можем получить квадратный корень из детерминанта, добавив множитель 1/2 в экспоненту гауссова интеграла. Рассмотрим снова случай, когда в матрице M отличен от нуля лишь блок A, так что переменные N^k являются антикоммутируюшими. Тогда матрица M антисимметрична. В силу хорошо известной теоремы детерминант антисимметричной матрицы равен квадрату определенного произведения ее элементов. Например, в электродинамике известна формула $\det F_{\mu\nu} = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})^2$. Если число духов N^k из теоремы II равно $n = 2l$, то вклад дает единственный член $(N^i M_{ij} N^j)^{n/2}$, и мы действительно получаем $[\det A]^{1/2}$. Как уже было сказано, величина $[\det A]^{1/2}$ равна алгебраической комбинации элементов матрицы A_{ij}.

Упражнение. Докажите, что

$$\det M = (af - eb + cd)^2,$$

где $M = -M^T$ и

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ & 0 & d & e \\ & & 0 & f \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(автор благодарит Б.Зумино, предложившего этот пример).

Как отмечалось в § 1, в классической теории вспомогательные поля необходимы для замыкания калибровочной алгебры вне массовой оболочки. Может оказаться, что построение взаимодействия некоторых глобально суперсимметричных систем полей материи с супергравитацией возможно лишь при наличии вспомогательных полей (в этом случае вспомогательные поля, вероятно, не могут быть исключены с помошью их уравнений движения из квантового действия). Оказывается, что можно квантовать теорию и в отсутствие вспомогательных полей. При этом возникает ряд новых моментов. Например, доказательство независимости континуального интеграла от фиксирующего калибровку члена F_α обычно основано на проверке инвариантности интеграла по калибровочной группе от детерминанта Фаддеева — Попова относительно некоторого (нелинейного) калибровочного преобразования. Но такое доказательство не проходит в том случае, когда калибровочная алгебра является открытой. Корректное доказательство независимости от калибровки можно провести различными способами, например

с помощью гамильтонова континуального интеграла или с помощью техники БРСТ-симметрии.

Проводя квантование с помощью континуальных интегралов, часто прибегают к приему умножения на "единицу"$\sim \int \delta (F_\alpha - b_\alpha)\ \Delta_{\text{Ф.П.}}\, d$(группа). Следуя 'т Хофту, мы можем преобразовать дельта-функцию $\delta(F_\alpha - b_\alpha)$ в экспоненту, снова умножив ее на "единицу" (см. теорему II):

$$\text{"Единица"} = (\operatorname{sdet} \gamma)^{1/2} \int d b_\alpha\, e^{1/2\, b_\alpha \gamma^{\alpha\beta} b_\beta}\ . \tag{4}$$

Учитывая детерминант Фаддеева – Попова $\Delta_{\text{Ф.П.}} = \operatorname{sdet} F_{\alpha,\,\beta}$, получаем

$$(\operatorname{sdet} \gamma)^{1/2}\ (\operatorname{sdet} F_{\alpha,\,\beta}) = (\operatorname{sdet} \gamma)^{-1/2} \operatorname{sdet} (\gamma^{\alpha\beta} F_{\beta,\,\gamma}). \tag{5}$$

Преобразуя $(\operatorname{sdet} \gamma)^{1/2}$ в экспоненту по теореме II (вводя действительные духи Нильсена – Каллош), мы окончательно приходим к квантовому лагранжиану (2) из § 10.

В заключении скажем несколько слов о вычислении вклада гравитино в гравитационную аксиальную аномалию. Рассматривая треугольную петлю гравитино во внешнем гравитационном поле, следует учитывать три вклада: 1) вклад самого действительного гравитино; 2) вклад комплексных коммутирующих "духов" Фаддеева – Попова, связанных с фиксацией суперкалибровки; 3) вклад действительных антикоммутирующих "духов" Нильсена – Каллош (у d_α та же статистика, что и у F_α). Сумма аномалий, отвечающих этим трем типам петель, дает полный результат для аксиальной аномалии.

Чтобы найти аксиальную аномалию необходимо определить киральные веса перечисленных выше полей. Теория (супергравитации) инвариантна относительно глобальных киральных преобразований

$$\delta\psi_\mu = i\gamma_5\psi_\mu\,,\ \delta C^*_\alpha = i\gamma_5 C^*_\alpha\,,\ \delta C^\alpha = (i\gamma_5 C)^\alpha\,. \tag{6}$$

Полагая $\delta\psi_\mu = i\gamma_5\psi_\mu$, мы находим веса духов Фаддеева – Попова из вида $C^*_\alpha \psi\, C_\nu$-вершин (C_ν есть "дух" общекоординатной группы). Наконец, *значение веса d_α следует из вида дополнительного члена с $\gamma^{\alpha\beta}{}_{,i}$ в квантовом лагранжиане:* $\delta d_\alpha = -i\gamma_5 d_\alpha$. В результате мы находим, что аксиальная аномалия гравитино равна $-21A$, где $2A$ – аномалия поля со спином 1/2 [22].

В некоторых топологических подходах учитывают лишь вклад в аномалию двух мод гравитино, но не духов. В этом случае $\delta(F_\alpha - b_\alpha)$ не преобразуется в экспоненту, т.е. духи Нильсена – Каллош отсутствуют, и используется калибровка $\gamma_\mu\psi_\mu = 0$. Полученный таким образом результат для аномалий [23] совпадает с результатом вычисления аномальной части диаграмм Фейнмана по методу Адлера – Розенберга [22].

Литература [1)]

1. *van Nieuwenhuizen P.* Phys. Repts., **68**, 189 (1981).
2. *Salam A., Strathdee J.* Nucl. Phys., **B80**, 499 (1974).
3. *Grisaru M.T., Pendleton H., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rev., **D15**, 996 (1977).
4. *Ferrara S., Gliozzi F., Scherk J., van Nieuwenhuizen P.* Nucl. Phys., **B117**, 333 (1976).
5. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rev. Lett., **37**, 1669 (1976).
6. *Luciani J.F.* Nucl. Phys., **B135**, 111 (1978).
7. *Kaku M., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rev., **D17**, 3179 (1978).
8. *Ferrara S., Zumino B.* Nucl. Phys., **B134**, 301 (1978).
9. *Stelle K.S.* Phys. Rev., **D16**, 953 (1977).
10. *Ferrara S., Grisaru M.T., van Nieuwenhuizen P.* Nucl. Phys., **B138**, 403 (1978).
11. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Nucl. Phys., **B203**, 157 (1982).
12. *D'Adda A., D' Auria R., Fre P., Regge T.* Riv. Nuov. Cim., **3**, № 6 (1980); *Castellani L., Fre P., van Nieuwenhuizen P.*, Ann. Phys., **136**, 398 (1981).
13. *Ne'eman Y., Regge T.* Riv. Nuov. Cim., **1**, №5 (1980).
14. *Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Lett., **67B**, 439 (1977); *Chamseddine A.H., West P.C.* Nucl.Phys., **B129**, 39 (1977).
15. *Nicolai H., Townsend P.K.* Phys. Lett., **98B**, 257 (1981).
16. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Rev., **D22**, 179 (1980).
17. *Duff M.J., van Nieuwenhuizen P.* Phys. Lett., **94B**, 179 (1980).
18. *Berends F.A., van Holten J.W., de Wit B., van Nieuwenhuizen P.* Nucl. Phys., **B154**, 261 (1979); J. Phys., **A13**, 1643 (1980).
19. *Avdeev L.V., Tarasov O.V., Vladimirov A.A.* Phys. Lett., **69B**, 94 (1980); *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Nucl. Phys., **B183**, 141 (1981); *Caswell W.E., Zanon D.* Nucl. Phys., **B181**, 125 (1981).
20. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* Nucl. Phys., **B195** 325 (1982); Phys. Lett., **119B**, 117 (1982).
21. *Nielsen N.K.* Phys. Lett., **103B**, 197 (1981).
22. *Grisaru M.T., Nielsen N.K., Römer H., Van Nieuwenhuizen P.* Nucl. Phys., **B140**, 477 (1978).
23. *Christensen S., Duff M.J.* Phys. Lett., **76B**, 571 (1978).
24*. *Nahm W.* Supersymmetries and their representations. Nucl. Phys., **B135**, 149 (1978).
25*. *Green M.B., Schwarz J.H.* Extended supergravity in ten dimensions. Phys. Lett. **122B**, 143 (1983).
26*. *Schwarz J.H., West P.C.* Symmetries and transformations of chiral $N=2$, $d=10$ supergravity. Phys. Lett., **126B**, 301 (1983).
27*. *Schwarz J.H.* Covariant field equations of chiral $N = 2$, $d = 10$ supergravity. Nucl. Phys., **B226**, 269 (1983).

[1)] Здесь и далее звездочкой помечена литература, добавленная при переводе. — *Прим. ред.*

28*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories. Phys. Lett., **134B**, 187 (1984).

29*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Asymptotic freedom in extended conformal supergravities. Phys. Lett., **110B**, 117 (1982).

30*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Instanton zero modes and beta-functions in conformal supergravity. Phys. Lett., **134B**, 307 (1984).

31*. *Tomboulis E.* Renormalizability and asymptotic freedom in quantum gravity. Phys. Lett., **99B**, 77 (1980).

32*. *Julve J., Tonin M.* Quantum gravity with higher derivative terms. Nuov. Cim., **46B**, 137 (1978).

33*. *Salam A., Strathdee J.* Remarks on high-energy stability and renormalizability of gravity theory. Phys. Rev., **D18**, 4480 (1978).

34*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity. Nucl. Phys., **B201**, 469 (1982).

35*. *Kaku M.* Strong coupling approach to quantization of conformal gravity. Phys. Rev., **D27**, 2819 – 2834 (1983).

36*. *Pisarsky R.* A soluble theory with massive ghosts. Phys. Rev. **D28**, 2547 (1983).

37*. *Tomboulis E.* Unitarity in higher derivative quantum gravity. Phys. Rev. Lett., **52**, 1173 (1984).

38*. *Lee S.C., Van Nieuwenhuizen P.* Counting of states in higher derivative field theories. Phys. Rev., **D26**, 934 (1982).

39*. *Van Holten J.W., van Proeyen A.* N = 1 supersymmetry algebras in d = 2,3,4 mod 8. J. Phys. **A15**, 3763 (1982).

40*. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B.* Conformal supergravity in ten dimensions Nucl. Phys., **B217**, 489 (1983).

41*. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* Model of supergravity with minimal electromagnetic interaction. Lebedev Physical Institute preprint N 197, p. 1 (1976).

42*. *Ore F.R., van Nieuwenhuizen P.* Local BRST symmetry and the geometry of gauge fixing. Nucl. Phys., **B204**, 317 (1982).

43*. *Batalin I.A., Kallosh R.E.* Quantization of gauge theories with open algebra in representation with third ghost. Nucl. Phys., **B222**, 134 (1983).

44*. *Березин Ф.А.* Метод вторичного квантования. – М.: Наука, 1965.

45*. *Цейтлин А.А.* Дуальные преобразования и эквивалентность на массовой оболочке. ЯФ, 1984, т. 40, с. 1363.

УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ РАСХОДИМОСТИ В РАСШИРЕННЫХ ТЕОРИЯХ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

М. Дафф*

§1. Введение

А. Квантовая гравитация и великое объединение

Хотя мои лекции посвящены ультрафиолетовой проблеме в теории гравитации, я начну с некоторых замечаний о великом объединении сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий. Основной вопрос может быть сформулирован следующим образом: "Какие из частиц, как обнаруженных, так и тех, которые еще предстоит открыть, являются элементарными и каковы их квантовые числа?" Ответ может быть найден либо в теории $SU(5)$, либо в теории $SO(10)$, либо в какой-то более фундаментальной теории "преонов", но при этом остается загадкой, почему природа должна выделить одну из множества математически допустимых симметрий. Начнем, скажем, с проблемы полного числа сортов частиц. Гравитация и производит в некотором смысле слова "подсчет" их числа. Рассмотрим, например, петлевые квантовые поправки к гравитационной собственной энергии. Ввиду принципа эквивалентности гравитационное поле взаимодействует со всеми полями (в том числе и с самим собой) с одинаковой силой. Поэтому не имеет значения, является ли частица, распространяющаяся внутри петли, кварком, промежуточным бозоном, фотоном или чем либо еще. Вклады всех этих частиц будут одинаковы по порядку величины. Следовательно, необходимо учитывать вклады *всех* элементарных частиц независимо от их масс и внутренних квантовых чисел. Таким образом, гравитация в принципе может дать информацию о спектре элементарных частиц.

Обратимся теперь к другой стороне проблемы – к задаче построения непротиворечивой квантовой теории гравитации. Здесь основной вопрос звучит так: "Как придать смысл теории, которая неперенормируема по крайней мере по индексу". Формальная степень расходимости фейнмановских диаграмм в теории есть $D = (d - 2)L + 2$ (§ 2), где d – размерность пространства-времени, а L – число замкнутых петель. При $d = 4$ величина D возрастает с ростом числа петель, что означает неперенормируемость теории. Выход мог бы состоять в том, чтобы добавить поля материи и добиться взаимного сокращения ультрафиолетовых расходимостей. Подчеркнем, что такой путь представляет собой отход как от обычного представления о перенормируемости, так и от старых идей об ультрафиолетовом обрезании на планковской длине. Вместо этого в основу кладется предположение, что элементы S-матрицы на массовой оболочке будут конечны в каждом порядке теории возмущений. Очевидно, что если это и возможно, то

---

*M. J. Duff, ЦЕРН, Женева, Швейцария.

лишь при каком-то определенном выборе масс, спинов и внутренних квантовых чисел полей материи. Поэтому спектр элементарных частиц в принципе может дать информацию о квантовой гравитации.

Самый простой вывод из сказанного – проблема построения единой теории электрослабых и сильных взаимодействий и проблема построения квантовой теории гравитации фактически есть одна и та же проблема: лишь при "правильном" спектре элементарных частиц теория будет конечной; требованием же конечности определяется спектр элементарных частиц. На первый взгляд идея такого отождествления кажется фантастической. Но в сравнении с другими попытками решения проблемы перенормируемости в квантовой гравитации (§ 2) ее можно счесть довольно консервативной. (Ведь нам уже привычен критерий отсутствия аномалий в теориях великого объединения, в которых для ограничения допустимых чисел кварков и лептонов налагается требование отсутствия определенного типа расходимостей.)

Мысль о том, что конечный характер квантовой гравитации может быть связан с определенным выбором спектра полей материи, бесспорно, не нова и развивалась еще до открытия супергравитации, хотя и не оказалась тогда особенно плодотворной. Было установлено, что в силу общих требований положительности и унитарности вклады в гравитационную собственную энергию, даваемые частицами со спинами 0, 1/2 и 1, одинаковы не только по порядку величины, но и по *знаку* [13, 10, 35]. Это лишило оснований надежды на сокращение расходимостей в функциях Грина вне массовой оболочки. Более перспективной казалась возможность получения конечной S-матрицы на массовой оболочке. Действительно, было установлено, что теория свободного гравитационного поля конечна в однопетлевом приближении [143]. Однако добавление различных комбинаций полей со спинами 0, 1/2 и 1 вновь приводило к расходимостям на массовой оболочке (соответствующие ссылки см. в § 2). Что касалось перспектив конечности в старших петлях (как с материей, так и без нее), то они выглядели еще более мрачными. Уже тогда были очевидны два недостатка такого раннего подхода. Во-первых, здесь не было истинного объединения гравитации и материи: сначала выбиралась определенная теория полей материи и лишь затем она искусственно "скрещивалась" с теорией гравитационного поля. Во-вторых, не было никакого руководящего принципа при поиске "магической" комбинации полей материи. Обзоры этих ранних исследований были даны Даффом [44] и Дезером [27] в трудах Оксфордской конференции по квантовой гравитации, проводившейся в 1974 г. На этой же конференции Салам [120] с характерным для него даром предвидения отметил и третий возможный недостаток: неучет полей со спином 3/2.

Б. Супергравитация

Простая супергравитация (с $N = 1$) [77, 36], непротиворечиво объединяющая гравитоны со спином 2 и гравитино со спином 3/2, явилась первым примером теории гравитации с материей, имеющей конечные элементы S-матрицы на массовой оболочке в однопетлевом приближении [90]. Супергравитация впервые

осуществила мечту о нетривиальном объединении гравитации с материей, при котором различные поля выступают как отдельные компоненты одного мультиплета. Отсутствовавший ранее руководящий принцип подобного объединения оказался принципом симметрии Ферми – Бозе. Плодотворность этого принципа подтверждается существованием расширенных теорий супергравитации с $1 < N \leqslant 8$ и особенно теории с $N = 8$, в которой объединяются в один мультиплет одно поле со спином 2, восемь полей со спином 3/2, 28 – со спином 1, 56 – со спином 1/2 и 70 – со спином 0. Хотя эти поля не удается непосредственно отождествить с частицами, известными в настоящее время, они могут оказаться преонами, связанные состояния которых совпадут с кварками, лептонами и т.п. [59, 26]. При построении преонных единых моделей принято исходить из требования "экономии" (т.е. минимального числа пречастиц), которое, очевидно, нарушается в супергравитации с $N = 8$. Но если иметь в виду *преполя*, а не пречастицы, то теория с $N = 8$ оказывается максимально "экономной", так как в ней только одно "суперполе".

Здесь естественно возникают два вопроса: 1) конечна ли расширенная супергравитация? 2) правильно ли она описывает наблюдаемые частицы? В настоящих лекциях будет дан обзор результатов, касающихся ответа на первый вопрос. Рекомендуем также другие обзоры по вопросу ультрафиолетовых расходимостей в супергравитации [153, 149, 159]. Как подробно изложено в лекциях Каллош [159] и резюмировано ниже в § 2, теории супергравитации конечны на массовой оболочке в одно- и двухпетлевом приближении, но, начиная с трех петель, имеются допустимые контрчлены. [Предполагается а) тривиальная топология пространства-времени, б) отсутствие космологической постоянной и в) отсутствие нарушения суперсимметрии. Обобщения случаев "а" и "б" будут обсуждаться ниже; случай нарушенной суперсимметрии рассмотрен в работе [150].] Как подробно изложено в работе [159], увеличение N до 8 не решает проблемы существования инвариантов – потенциальных контрчленов. Остается надежда, по-видимому, только на то, что *коэффициенты* перед этими инвариантами в расходящихся выражениях фактически окажутся равными нулю. (Напомним, что, несмотря на большие усилия, все явные вычисления, которые удалось провести в квантовой супергравитации, относились лишь к однопетлевому приближению.) Хотя такая надежда на первый взгляд выглядит как соломинка для утопающего, на деле ее можно обосновать конкретными примерами из квантовой суперсимметрии и супергравитации, в которых имеет место желаемое явление "неперенормировки".

Первый такой пример (мы рассмотрим его в § 3) касается расширенной супергравитации с локальной $SO(N)$-инвариантностью. В случае калибровочной $SO(N)$-симметрии имеется космологическая постоянная, которая связана с калибровочной константой e. Вследствие этого обычные доказательства однопетлевой конечности оказываются несостоятельными. Более того, можно доказать, что в теориях с $N \leqslant 4$ необходимы бесконечные перенормировки. Замечательно, однако, что в теориях с $N > 4$ спектр частиц устроен так, что эти расходимости взаимно сокращаются; это означает, в частности, равенство нулю однопетлевой β-функции для e [21]. Данное свойство напоминает равенство нулю β-функции в суперсимметричных теориях Янга – Миллса с $N > 2$, справедливом по крайней

мере в трехпетлевом приближении [5, 86, 14][1]. Подчеркнем, что в обоих случаях имеются допустимые контрчлены, но *коэффициенты* перед ними оказываются равными нулю.

В § 3 мы покажем, что такие "чудесные" сокращения находят единое объяснение (справедливое в однопетлевом приближении) в определенных "спиновых правилах сумм" [24]. Эти правила сумм явятся первым конкретным подтверждением предположения, что ультрафиолетовые расходимости "уменьшаются" с ростом N. При доказательстве существования связи между этими спиновыми правилами сумм и ультрафиолетовыми расходимостями и аномалиями мы будем опираться на ранние работы [17, 19], посвященные контрчленам и аксиальным и конформным аномалиям для полей с произвольным спином.

Другой пример, интересный в техническом отношении, касается перенормировки янг-миллсовской константы взаимодействия e, связанной с космологической постоянной Λ соотношением $\kappa^2\Lambda = -6e^2$, где $\kappa^2 = 8\pi G$ и G – ньютоновская гравитационная постоянная. Возможны два способа вычисления функции $\beta(e)$. Первый основан на вычислении коэффициента перед янг-миллсовским контрчленом $\mathrm{Tr}\sqrt{g}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, который слагается из вкладов полей со спинами 0, 1/2, 1 и 3/2 (вклад гравитона, являющегося синглетом, равен нулю). Второй заключается в вычислении перенормировки космологического члена, т.е. коэффициента перед контрчленом $\sqrt{g}$, в который дают вклад поля всех спинов, в том числе и гравитон. В силу суперсимметрии коэффициенты, найденные двумя указанными способами, связаны между собой. (Интересно, что независимо от того, веришь ли или не веришь в супергравитацию, подобное вычисление позволяет найти величину петлевых эффектов в свободной гравитации, если известны свойства теории Янга – Миллса в плоском пространстве.) В § 3 мы вычислим $\beta(e)$ обоими способами и продемонстрируем их эквивалентность. Для вычислений вторым способом необходимо воспользоваться результатами анализа квантовых эффектов в теории гравитации с космологическим членом [20], о которых мы скажем несколько слов.

Как уже говорилось, цель данных лекций состоит в обсуждении тех ультрафиолетовых свойств, которые присущи супергравитациям с выделенными значениями N, а не тех свойств, которые являются общими для всех теорий с произвольным N. В § 4 мы вернемся к обычной (т.е. некалибровочной) супергравитации и исследуем зависимость аномалий и топологических контрчленов от N.

Аномальный вклад в след эффективного тензора энергии-импульса в теориях гравитации в однопетлевом приближении пропорционален (на массовой оболочке) $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\rho\sigma\alpha\beta}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\mu\nu\gamma\delta}$ [45]. Интеграл от этой величины, взятый по всему пространству, дает топологический инвариант – эйлерову характеристику χ. Ввиду того что аномалии возникают вследствие расходимостей, имеется соответствующий контрчлен, пропорциональный χ, который отличен от нуля в пространствах с нетривиальной топологией. Численный коэффициент этой аномалии A был вычислен для расширенных теорий супергравитации и оказался отлич-

[1] В настоящее время такое равенство доказано во всех порядках теории возмущений [160 – 162]. – *Прим. перев.*

ным от нуля и нецелым при $N = 1$ и 2 и целым ($A = 3 - N$) при $N \geqslant 3$ [17, 21]. Вычисления основывались на обычном сопоставлении представлений полей частицам с определенным спином. Однако вскоре выяснилось, что A зависит не только от спина, но и от выбора представления поля [58]. Например, вопреки наивным ожиданиям, калибровочная теория антисимметричного тензорного поля второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$ не эквивалентна теории скалярного поля φ, хотя обе они описывают частицы с нулевым спином. Точно так же калибровочная теория антисимметричного тензорного поля третьего ранга $\varphi_{\mu\nu\rho}$ не является тривиальной, хотя она не описывает распространения частиц.

Эти результаты были бы интересны лишь с чисто академической точки зрения, если бы поля таких необычных представлений не возникали в качестве вспомогательных полей в простой супергравитации, а также, уже в качестве физических полей, в вариантах расширенных теорий супергравитации, получаемых путем размерной редукции. Например, супергравитация с $N = 1$ в 11 измерениях содержит антисимметричное поле $\varphi_{\mu\nu\rho}$. После размерной редукции к 4 измерениям мы получаем супергравитацию с $N = 8$, но содержащую не 70 скаляров, а 63 поля φ, 7 полей $\varphi_{\mu\nu}$ и 1 поле $\varphi_{\mu\nu\rho}$. Замечательно, что коэффициент A для теории с $N = 8$, содержащей такой набор представлений полей, теперь равен нулю! То же самое наблюдается в теории с $d = 4$ и $N = 4$, полученной путем редукции из супергравитации с $d = 10$ и $N = 1$, где имеются два поля со спином, равным 0: одно поле φ и одно поле $\varphi_{\mu\nu}$. Как следствие этого мы имеем $A = 0$ не только при $N = 3$, но и при $N = 4$ и при $N = 7, 8$. Экстраполируя выбор представлений на случаи $N = 5$ и $N = 6$, можно обеспечить выполнение равенства $A = 0$ для всех теорий с $N \geqslant 3$ [49, 50, 109]. Вывод этих результатов подробно рассматривался ранее [50], и поэтому в § 4 мы ограничимся лишь их интерпретацией в рамках метода суперполевого квантования и суперполевых диаграмм Фейнмана [87]. В частности, мы покажем, что из двух типов суперполей, а именно киральных и некиральных, лишь квантовые петли *киральных* суперполей дают вклад в коэффициент A. Поэтому, анализируя расширенные теории супергравитации с использованием суперполей с $N = 1$, можно объяснить отсутствие аномалий и конечный характер теорий просто тем, что при $N \geqslant 3$ полное число киральных суперполей (т.е. число физических суперполей минус число духовых) равно нулю.

В § 4 мы покажем также, что коэффициенты в аномалиях зависят не только от выбора представлений физических или вспомогательных полей, но и от выбора граничных условий.

В § 5 мы кратко изложим новые результаты, полученные уже после прочтения этих лекций.

В. Калуца – Клейн?

Завершая вводную часть, хотелось бы отметить вновь появившийся в последнее время интерес к многомерным теориям типа теории Калуцы – Клейна. Исходным пунктом здесь является теория гравитации в пространстве $M \times B$, где M - четырехмерное пространство-время, а B – некоторое компактное пространство. Итогом же оказывается теория Эйнштейна – Янга – Миллса в пространстве M с

калибровочной группой, определяемой симметриями пространства B. В этой связи особый интерес представляет супергравитация с $N = 1$ в 11 измерениях. Во-первых, как было отмечено в статье Виттена [157], одиннадцать – это одновременно и минимальное число измерений, необходимое для того, чтобы $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ могла служить в качестве калибровочной группы, и максимальное число измерений, совместимое с требованием суперсимметрии. (Статья Виттена содержит много и других интересных результатов.) Во-вторых, в 11-мерной супергравитации имеется открытый Фрейндом и Рубиным [78] динамический механизм преимущественной компактификации семи (или четырех) измерений. Он связан с наличием в теории антисимметричного поля $\varphi_{\mu\nu\rho}$, которое может приводить к появлению космологической постоянной [58, 4] и обеспечивать существование решений $M \times B$ классических уравнений супергравитации с $d = 11$, для которых пространство B компактно и имеет размерность $d = 7$, а пространство M не компактно и имеет $d = 4$. Подчеркнем, что в подходе Калуцы – Клейна "лишние" измерения следует принимать всерьез наравне с четырьмя обычными. В этом состоит отличие от упомянутой выше размерной редукции, которая есть лишь удобный способ нахождения лагранжиана теории с $N = 8$ в 4 измерениях, отвечающий отбрасыванию всех массивных мод в "гармоническом" разложении по "лишним" координатам.

В связи с изложенным основной вопрос в подходе Калуцы–Клейна заключается не в том, конечна ли супергравитация с $N = 8$ в 4 измерениях, а в том, *конечна ли супергравитация* с $N = 1$ в *11 измерениях*!

Степень расходимости в 11-мерной теории гравитации равна $9L + 2$, т.е. положение здесь хуже, чем в 4-х измерениях. Нужно, однако, иметь в виду, что нас интересует не перенормируемость по индексу, а конечный характер, обусловленный сокращением ультрафиолетовых расходимостей. Представляется, что последнее столь же вероятно при $d = 11$, как и при $d = 4$. Более того, при нечетном числе измерений теории гравитации обязательно конечны в нечетном числе петель, так как не существует инвариантов, построенных из метрики, в которые входило бы нечетное число производных. В этом смысле мы уже на полпути к цели[1].

Как бы там ни было, данные лекции основаны на предположении, что мы живем в 4-х измерениях. Ультрафиолетовые расходимости в теориях типа теории Калуцы – Клейна будут рассмотрены в другой работе [56].

§ 2. Обзор проблемы перенормируемости

А. Свободная гравитация

Рассмотрим лагранжиан свободного гравитационного поля с нулевой космологической постоянной

---

[1] Как выяснилось в последнее время, 11-мерная супергравитация, по-видимому, не является конечной: в ней имеются однопетлевые степенные расходимости [163], а также существуют суперинварианты, которые могли бы играть роль контрчленов, начиная с двухпетлевого приближения [162]. – *Прим. перев.*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi G}\sqrt{g}R \ . \tag{2.1}$$

Ввиду того что скаляр кривизны R зависит от двух производных метрики, соответствующие вершинные функции в импульсном пространстве пропорциональны величине p^2, а пропагатор ведет себя как $1/p^2$. Вклад каждого петлевого интеграла в d измерениях равен p^d, так что формальный индекс расходимости фейнмановской диаграммы, содержащей L петель, V вершин и P внутренний линий, дается выражением

$$D = dL + 2V - 2P. \tag{2.2}$$

Комбинируя его с топологическим соотношением

$$L = 1 - V + P \ , \tag{2.3}$$

получаем

$$D = (d-2)L + 2. \tag{2.4}$$

Мы видим, что D не зависит от числа внешних линий. Главное в том, что D при $d > 2$ растет с увеличением числа петель, а это означает неперенормируемость теории. При $d = 2$ лагранжиан (2.1) не имеет динамического смысла, так как он равен полной производной[1]. Посмотрим теперь, что полученный результат означает на практике при $d = 4$, выбрав какую-нибудь конкретную схему регуляризации. Мы будем использовать размерную регуляризацию, т.е. проводить все вычисления в $4+\varepsilon$ измерениях, а затем переходить к пределу при $\varepsilon \to 0$. В однопетлевом приближении мы имеем $D = 4$; это означает, что однопетлевые контрчлены $\mathcal{L}_{(1)}$ должны зависеть не более чем от четырех производных. Единственными общековариантными скалярами, допустимыми по размерности, являются $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и R^2, так что

$$\mathcal{L}_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{g}\,[\alpha R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \beta R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \gamma R^2] \ . \tag{2.5}$$

Здесь мы предположили, что используется метод фонового поля (§ 3) и потому контрчлены зависят лишь от фоновой метрики, а не от гравитонов или духов, распространяющихся по петле. Константа α не зависит от выбора калибровки для квантового гравитационного поля, тогда как β и γ зависят от калибровки. Последнее связано с возможной зависимостью от калибровки функций Грина вне массовой оболочки. Калибровочно-инвариантной физике отвечают лишь элементы S-матрицы на массовой оболочке. Выбор внешних линий на массовой оболочке в рамках метода фонового поля соответствует использованию классических уравнений для фонового поля, а именно $R_{\mu\nu} = 0$. Прежде чем воспользоваться ими, заметим, что комбинация $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2$ есть полная дивергенция и, следовательно, интеграл от нее по всему пространству равен нулю, если пространство-время имеет тривиальную топологию (в общем

[1] Последнее не означает, однако, тривиальности квантовой гравитации при $d = 2$ ввиду наличия конформной аномалии [114, 73]. — *Прим. перев.*

случае этот интеграл есть топологический инвариант – эйлерова характеристика, которая принимает целые значения в пространствах с нетривиальной топологией, см. § 4). В результате интеграл $\int d^4x\,\mathcal{L}_{(1)}$ равен нулю на массовой оболочке, и, стало быть, элементы S-матрицы на массовой оболочке конечны в однопетлевом приближении.

Реальная проблема возникает при выходе за рамки однопетлевого приближения. Например, в двух петлях мы имеем $D = 6$, а значит, в добавление к членам, исчезающим при учете уравнений поля, можно ожидать появления расходимостей, пропорциональных, например, произведению $\sqrt{g}R_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}{}^{\mu\nu}$, которые отличны от нуля на массовой оболочке. Вследствие этого расходимости будут присутствовать даже в элементах S-матрицы, и их можно устранить лишь путем введения контрчленов, не имевшихся в исходном лагранжиане. В общем случае можно ожидать бесконечного числа различных контрчленов и соответственно этому бесконечного числа произвольных параметров в теории, т.е."катастрофы" неперенормируемости.

В литературе можно встретить различные точки зрения на эту проблему.

1. Квантование гравитации не имеет смысла. Другими словами, следует квантовать лишь поля материи, оставляя гравитационное поле классическим (см., например, [107]).

2. Проблема не в квантовании гравитации как таковой, а в методе теории возмущений. Чтобы результаты были конечными и однозначными, следует суммировать все диаграммы или диаграммы подходящего подкласса всех диаграмм. Подобная идея лежала в основе старого подхода неполиномиальных лагранжианов [99]. Здесь проблема оказалась не в том, чтобы получить конечный ответ, а в том, чтобы конечный ответ был однозначен.

3. В конце концов перенормируемость может оказаться ошибочным критерием. В качестве примера предложения, попадающего в эту категорию, упомянем программу "асимптотической безопасности" Вайнберга [153].

4. Следует изменить лагранжиан Эйнштейна, добавив члены, квадратичные по кривизне, т.е. зависящие от четырех производных метрики [42, 134]. В этом случае вершины пропорциональны величине p^4, а пропагатор – величине $1/p^4$. Следовательно, в 4 измерениях мы имеем $D = 4L + 4V - 4P = 4$ и нет необходимости во введении контрчленов, кроме тех, которые имеются в исходном лагранжиане. Однако перенормируемость здесь обеспечена ценой потери "древесной" унитарности, так как теории с четырьмя производными содержат нефизические духовые полюса в пропагаторах. Предлагались различные способы преодоления этой трудности с унитарностью, однако ни один из них не оказался полностью успешным. Например, суммирование "пузырьковых" диаграмм, по-видимому, ведет к нарушению причинности [144], а теории с распространяющимся кручением не могут быть одновременно и унитарными, и перенормируемыми [126][1]. Остается неясным, не является ли это видимое отсутствие унитарности недостатком

---

[1] См. также работу [164]. – *Прим. перев.*

используемой схемы аппроксимации, который не будет иметь места в точной теории. Здесь мы можем лишь отослать читателя к работам Джулве и Тонина [101], Салама и Стретди [123], Вайнберга [153], Фрадкина и Цейтлина [70 – 72] и Кристенсена [15]. К классу теорий с производными четвертого порядка следует также отнести подход "индуцированной гравитации", в которой эйнштейновский лагранжиан вместе с квадратичными по кривизне членами индуцируется квантовыми эффектами полей материи. Обзор теорий индуцированной гравитации, восходящих к работе Сахарова [119], был недавно сделан Адлером [1].

5. Проблема не в теории Эйнштейна как таковой и не в методе теории возмущений, а в неучете корректного набора полей материи. Иными словами, существует (может быть, единственный) выбор полей материи, при котором вследствие взаимного сокращения расходимостей элементы S-матрицы на массовой оболочке конечны в каждом порядке теории возмущений.

В мои цели не входит критика или защита предложений 1 – 4. Напомню лишь замечание, сделанное во введении, что предложение 5, хотя и достаточно смелое, кажется мне консервативным в сравнении с предложениями 1 – 4. Мои возражения против полуклассических подходов можно найти в работе [48].

Б. Гравитация при наличии материи

Независимо от того, принимаем ли мы точку зрения 5 или нет, естественно спросить, что происходит при учете взаимодействия с материей. Снова мы можем выписать выражение для наиболее общего однопетлевого контрчлена, допустимого из соображений размерности, общей ковариантности и также других возможных симметрий в теории. В результате в добавление к членам с $\sqrt{g}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ и $\sqrt{g}R^2$ можно ожидать с членов $\kappa^2\sqrt{g}R_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, $\kappa^2\sqrt{g}RT^{\mu}_{\mu}$ и $\kappa^4\sqrt{g}T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$, $\kappa^4\sqrt{g}T^{\mu}_{\mu}T^{\nu}_{\nu}$, где $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса полей материи. В общем случае могут быть и другие, более сложные члены, зависящие от полей материи. В отличие от случая свободной гравитации для определения численных коэффициентов в расходящихся членах необходимы явные вычисления. Эти вычисления к настоящему времени были проделаны для различных систем "гравитация плюс материя" [143, 34, 35, 111, 127, 58, 152, 7]. Как правило, все члены, допускаемые симметриями, возникают с отличными от нуля коэффициентами. В случае массивных полей ($m \neq 0$) имеются еще и новые расходимости типа $m^4\sqrt{g}$ и $m^2\sqrt{g}R$. (Такие члены исчезают в безмассовом пределе лишь тогда, когда используется регуляризация с безразмерным регуляризующим параметром. Если же подобный параметр обрезания Λ имеет размерность, то члены типа $\Lambda^4\sqrt{g}$ и $\Lambda^2\sqrt{g}R$ имеются даже в безмассовых теориях.) Бывают, впрочем, сюрпризы, когда контрчлен, допустимый из общих соображений, тем не менее отсутствует. В качестве примера укажем на отсутствие члена с $\sqrt{g}R_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ в теории Эйнштейна – Максвелла [35], а также на конечную величину гравитационных поправок к аномальному магнитному моменту электрона в квантовой электродинамике, модифицированной с учетом гравитации [8]. Подобные факты можно объяснить, указав некоторую, заранее неочевидную симметрию в теории (типа дуальной инвариантности) или осуществив погружение теории в супергравитацию [28, 152].

Главный вопрос, конечно, заключается в том, равны ли нулю подобные однопетлевые контрчлены после перехода на массовую оболочку. Под "массовой оболочкой" мы теперь понимаем уравнения Эйнштейна с учетом материи $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \kappa^2 T_{\mu\nu}$, дополненные уравнениями для материальных полей. Для всех комбинаций и представлений полей со спинами 0, ½ и 1, которые были испробованы к настоящему времени, был получен отрицательный ответ на указанный вопрос. Таким образом, все "солидные" теории в плоском пространстве, такие, как квантовая электродинамика (КЭД), хромодинамика, теория Вайнберга – Салама и единые теории (которые все были построены на основе требования *перенормируемости*), теряют смысл при учете квантовой гравитации.

Но, пожалуй, и нет ничего особенно удивительного в том, что добавление перенормируемой теории типа КЭД к неперенормируемой теории типа гравитации дает расходящиеся результаты. Может быть, чтобы получить конечную теорию, следует добавить к гравитации другую *неперенормируемую* теорию? Примером может служить гравитация, взаимодействующая с материей, описываемой нелинейной σ-моделью [51]. Но и эта теория оказывается расходящейся. (Вычисление однопетлевых контрчленов в этой теории мотивировалось в основном желанием продемонстрировать противоречивость квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени [48].) Интересно отметить, однако, что однопетлевые контрчлены для σ-модели с константой связи κ уже в плоском пространстве имеют вид $\kappa'^4 T_{\mu\nu} T^{\mu\nu}$ и $\kappa'^4 T^{\mu}_{\mu} T^{\nu}_{\nu}$, благодаря чему увеличивается вероятность сокращений с упомянутыми выше контрчленами в искривленном пространстве, если константа связи κ' выбрана равной κ. Так что этот шаг, возможно, сделан в правильном направлении, ибо неполиномиальные взаимодействия действительно возникают в расширенных теориях супергравитации. Именно к супергравитации мы теперь и обратимся.

В. Простая супергравитация

Лагранжиан простой супергравитации с $N = 1$ [77, 36]

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2} eR + \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma + \frac{e}{3} (S^2 + P^2 - b^\mu b_\mu) \tag{2.6}$$

описывает взаимодействие гравитации $e_\mu{}^a$ с одним майорановским спинором (со спином $^3/_2$) ψ_μ и не попадает в категорию систем "гравитация плюс материя", о которых говорилось выше. В уравнение (2.6) мы включили также минимальный набор вспомогательных полей S, P и b_μ, которые равны нулю на массовой оболочке, но необходимы для замыкания алгебры суперсимметрии без учета уравнений движения [138, 63]. Мы еще вернемся к ним в дальнейшем. Первые вычисления квантовых петель в супергравитации были фактически проведены до открытия вспомогательных полей. Как теперь хорошо известно, теорема супергравитации стала первым примером гравитационно-материальной теории, конечной в однопетлевом приближении на массовой оболочке [90]. Действительно, можно показать, что однопетлевой контрчлен имеет символический вид

$$\mathcal{L}_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon} \text{ (уравнения поля)}^2 \tag{2.7}$$

и вследствие этого обращается в нуль после учета уравнений Эйнштейна и уравнений Рариты – Швингера. (Мы по-прежнему игнорируем топологические эффекты, см. § 4). То, что супергравитация достигла успеха там, где все другие теории гравитации с материей потерпели неудачу, разумеется, не случайно и связано с дополнительной симметрией лагранжиана (2.6), а именно суперсимметрией. Дело в том, что не существует суперсимметричных инвариантов с нужной размерностью, которые могли бы давать вклад в $\mathcal{L}_{(1)}$, не обращаясь одновременно в нуль на массовой оболочке. В этом отношении теория супергравитации явилась прямым аналогом свободной теории гравитации.

Замечательно, однако, что супергравитация продвинулась на шаг дальше свободной гравитации, оказавшись конечной и в двухпетлевом приближении [82]: не существует суперсимметричных инвариантов с нужной размерностью, отличных от нуля на массовой оболочке, которые могли бы давать вклад в $\mathcal{L}_{(2)}$. Другими словами, упомянутый выше инвариант R^3 не имеет фермионного партнера, а также отсутствуют новые фермионные инварианты, не имеющие бозонных партнеров.

К сожалению, ситуация изменяется, начиная с трех петель. Как было показано в работе [31], существует, по крайней мере на линеаризованном уровне, суперинвариант на массовой оболочке, который может выступать в роли трехпетлевого контрчлена. Он соответствует суперсимметричному расширению квадрата тензора Беля – Робинсона. Таким образом, одних соображений инвариантности оказывается недостаточно для запрещения всех контрчленов в простой супергравитации, так что гипотеза конечности, хотя и не опровергнутая, остается недоказанной.

Следует, конечно, убедиться в том, что трехпетлевой инвариант существует и на нелинейном уровне, а также исследовать четыре и более петли. Эти задачи требуют более систематического подхода, основанного либо на тензорном исчислении [64], либо на аппарате суперпространства. Введение в суперпространственные методы можно найти в работе [121], а также в лекциях Стретди (см. данный сборник, с. 19). При анализе контрчленов в высших петлях наиболее удобны суперполя Весса и Зумино [156] (мы используем двухкомпонентные спинорные обозначения)

$$R,\ G_{\alpha\dot{\alpha}},\ W_{\alpha\beta\gamma},$$

через которые выражаются все компоненты суперкручения и суперкривизны. Уравнения для компонентных полей (Эйнштейна, Рариты – Швингера и вспомогательных) содержатся в уравнениях

$$R = 0,\ G_{\alpha\dot{\alpha}} = 0. \tag{2.8}$$

Что касается суперполя $W_{\alpha\beta\gamma}$, то оно отлично от нуля на массовой оболочке и равно

$$W_{\alpha\beta\gamma} \sim F_{\alpha\beta\gamma} + C_{\alpha\beta\gamma\sigma}\theta^{\delta}, \tag{2.9}$$

где $F_{\alpha\beta\gamma}$ – напряженность поля со спином $3/2$, $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ – тензор Вейля, а θ^{δ} – фермионные координаты в суперпространстве. Все инварианты строятся из этих полей и их ковариантных производных. Структура однопетлевого контрчлена в

формуле (2.7) и конечность в одно- и двухпетлевом приближениях теперь выступают как простые следствия того факта, что лишь суперполе $W_{\alpha\beta\gamma}$ отлично от нуля на массовой оболочке, а из него нельзя построить инварианты с требуемой размерностью.

Здесь нужно указать на одно обстоятельство, которое еще не отмечалось в литературе. Как известно, свободное гравитационное поле описывается 14 алгебраически независимыми скалярами, которые могут быть построены из тензора Римана. Из них 14 – 10 = 4 отличны от нуля на массовой оболочке [153]. Соответствующие числа в супергравитации оказываются в 2 раза меньшими! Из суперполей R, G и W может быть построено 7 инвариантов, из которых 7 – 5 = 2 остаются отличными от нуля на массовой оболочке (Дафф и Стелле, не опубликовано). Этими двумя являются

$$W_{\alpha\beta\gamma} W^{\alpha\beta\gamma} \text{ и } \bar{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} \bar{W}^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma},$$

где $\bar{W}^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$ – суперполе, комплексно сопряженное суперполю $W_{\alpha\beta\gamma}$. После интегрирования по всему суперпространству они приводят к двум топологическим инвариантам $\chi \pm (i/2)P$, где χ – характеристика Эйлера, а P – индекс Понтрягина (§ 4).

Алгебраической независимости, конечно, недостаточно для выявления всех возможных контрчленов. Новые контрчлены могут быть образованы как произведения. Например [66], произведение

$$W_{\alpha\beta\gamma} W^{\alpha\beta\gamma} \bar{W}_{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma} \bar{W}^{\dot\alpha\dot\beta\dot\gamma}$$

есть в точности обсуждавшийся выше трехпетлевой инвариант (связанный с квадратом тензора Беля – Робинсона). Однако ввиду симметрии по трем индексам и антикоммутативности суперполя $W_{\alpha\beta\gamma}$ мы имеем $W^n = 0$ при $n > 4$ [16]. То, что новые инварианты могут строиться с помощью суперковариантных производных D_α и $\bar{D}_\alpha$, приводит к изобилию возможных контрчленов. Но их число можно существенно ограничить, используя другую симметрию лагранжиана (2.6), а именно γ_5-инвариантность. Классифицируя оставшиеся инварианты, можно обнаружить следующую интересную закономерность: все они обращаются в нуль в случае, если поля самодуальны или антисамодуальны, т.е. если суперполе W или $\bar{W}$ равно нулю [19, 16, 102, 103]. Это тесно связано с явлением сохранения спиральности в супергравитации [84, 16, 53, 54, 46]. Несмотря на такое уменьшение их числа, отличные от нуля инварианты все же имеются во всех петлях порядка > 3.

А что будет, если ввести взаимодействие супергравитации с полями материи? Как и в случае гравитации, добавление случайной комбинации супермультиплетов материи с $N = 1$ приводит к исчезновению конечности даже в однопетлевом приближении [69, 151]. Мы, однако, уже знаем, что положение улучшается, если взаимодействие с материей определяется требованием суперсимметрии. Может ли включение взаимодействия между супергравитацией с $N = 1$ и мультиплетами материи с $N = 1$ привести к конечности, если оно ограничено дополнительной суперсимметрией? Этот вопрос естественным образом приводит нас к расширенной супергравитации.

Г. Расширенная супергравитация

Ввиду того что инварианты, которые могут выступать в качестве контрчленов в расширенной супергравитации, подробно рассматриваются в лекциях Каллош [159], здесь мы ограничимся лишь отдельными замечаниями. Сразу же отметим, что, несмотря на расширенную суперсимметрию и обобщенную γ_5-симметрию (включающую γ_5-преобразования и преобразования дуальности), в этой теории по-прежнему существуют инварианты, которые могут выступать в роли многопетлевых контрчленов [31, 94, 105, 96, 135]. Более того, это справедливо даже при $N > 4$ (когда уже не существует мультиплетов материи) вплоть до супергравитации с $N = 8$, которая, естественно, представляется наиболее подходящим претендентом на роль конечной теории. Здесь уместно задать вопрос о предположениях, которые лежали в основе изложенной выше программы.

Прежде чем искать пути уменьшения числа контрчленов и даже их полного исключения, зададимся вопросом, обоснованно ли мы ограничились анализом лишь контрчленов на массовой оболочке. (Вспомним, что мы игнорировали топологические эффекты, добавки типа космологического члена в лагранжиане, эффекты граничных членов и, наконец, не учитывали возможность спонтанного нарушения суперсимметрии; подробнее обо всем этом будет сказано позже.) Например, мы предполагали, что наша схема регуляризации сохраняет суперсимметрию. Соответствует ли это действительности? Хотя обычная размерная регуляризация не сохраняет суперсимметрию, считалось, что при регуляризации путем размерной редукции больше шансов на сохранение суперсимметрии (см., например, работу [130]). Но недавно было показано, что такая регуляризация может быть осуществлена непротиворечиво лишь ценой потери явной суперсимметрии в более высоком порядке петель, например, начиная с восьми петель в суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$ [5]. Может оказаться, что суперсимметрия тем не менее сохраняется, но данный вопрос полностью еще не решен.

Допустим, что существует некоторая инвариантная схема регуляризации (см. также [131]); имеем ли мы право рассматривать лишь инварианты на массовой оболочке в качестве допустимых контрчленов? Положительный ответ предполагает использование метода фонового поля, который явно сохраняет суперсимметрию, что в свою очередь требует суперсимметричной процедуры фиксации калибровки и добавления духов. Такая схема в принципе должна существовать, даже если мы не используем ее в конкретных вычислениях петель. Некоторые из возникающих здесь проблем обсуждались в работе [39]. Оказывается, что такая схема действительно существует по крайней мере для супергравитации с $N = 1$, для которой полностью известен суперполевой формализм (учитывающий вспомогательные поля). Соответствующая техника, которая, вероятно, окажется наиболее эффективной как на практике, так и при общем анализе, достаточно полно описана в работе [87]. Но это вновь возвращает нас к вопросу о вспомогательных полях, который был ранее отложен. Даже для простой супергравитации возможен целый ряд вариантов с различными вспомогательными полями [9, 138, 63, 133]. Приводят ли они к различ-

ным квантовым теориям? Как объясняется в § 4, этим вариантам соответствуют разные аномалии, хотя существует общее мнение, что эти различные варианты приводят к одинаковым элементам S-матрицы на массовой оболочке. А что можно сказать о расширенных супергравитациях с $N \geqslant 3$ и суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$, для которых не только неизвестны вспомогательные поля, но и не доказана даже теорема существования таких полей (см., например, [140 – 142])? Имеет ли смысл рассматривать инварианты на массовой оболочке в качестве возможных контрчленов, если их расширения вне массовой оболочки могут не существовать? Как подчеркивалось рядом авторов, для понимания ультрафиолетовой проблемы в расширенных теориях супергравитации необходимо тщательное изучение структуры вспомогательных полей в этих теориях. Тем не менее кажется маловероятным, что красивые сокращения расходимостей, о которых будет говориться в § 3, исчезнут после включения вспомогательных полей. Трудно, конечно, не согласиться, что полный суперпространственный подход значительно упростит задачу исследования конечности теории.

Итак, представляется, что анализ инвариантов на массовой оболочке как возможных контрчленов сам по себе, вероятно, правилен. Но достаточно ли такого анализа, это, конечно, другой вопрос. Ниже мы попытаемся выяснить, могут ли численные коэффициенты при таких контрчленах обращаться в нуль.

§ 3. Спиновые правила сумм и равенство нулю β-функций

А. Спиновые правила сумм

В данном параграфе мы рассмотрим те случаи сокращения расходимостей в суперсимметричных теориях, которые не могут быть объяснены отсутствием подходящих инвариантов – кандидатов на роль контрчленов, т.е. так называемые "чудесные" сокращения, когда инвариантный контрчлен возникает с нулевым коэффициентом.

Самый удивительный пример такого рода – обращение в нуль однопетлевой β-функции в калибровочных расширенных супергравитациях с $N > 4$ [21]. В то время, когда этот результат был опубликован, причина такого "чудесного" сокращения была неизвестна, но имелся его аналог – столь же "чудесное" обращение в нуль β-функции в суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N > 2$, выполнявшееся вплоть до трех петель [6, 86, 14]. Кроме того, в то время полный лагранжиан калибровочных супергравитаций с $N > 4$ еще не был построен и некоторые даже выражали сомнения в существовании таких теорий. Эти сомнения были рассеяны работами Де Вита и Николаи [40, 41].

Естественно спросить, чем выделены старшие значения N. Ввиду того что до сих пор отсутствует полное суперполевое описание расширенных теорий, мы рассмотрим их спиновый состав в компонентах (табл. 1 и 2). Как хорошо известно, все супермультиплеты имеют равные числа бозонных и фермионных степеней свободы, т.е.

$$\sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} d(\lambda) = 0, \qquad (3.1)$$

Таблицы 1 и 2

Число состояний $d(\lambda)$ со спиральностью λ в суперсимметричной теории Янга – Миллса (табл. 1) и расширенной супергравитации (табл. 2). Необходимо учитывать также CPT-сопряженные мультиплеты (во всех случаях, кроме случая самосопряженных теорий Янга – Миллса с $N = 4$ и супергравитации с $N = 8$). В скобках указаны значения квадратичного инварианта Казимира $C(\lambda)$

Таблица 1

λ	N			
	1	2	3	4
1	1 (C)	1 (C)	1 (C)	1 (C)
½	1 (C)	2 (C)	3 (C)	4 (C)
0		1 (C)	3 (C)	6 (C)
– ½			1 (C)	4 (C)
– 1				1 (C)

Таблица 2

λ	N							
	1	2	3	4	5	6	7	8
2	1(0)	1(0)	1(0)	1(0)	1(0)	1(0)	1(0)	1(0)
3/2	1(0)	2(1)	3(1)	4(1)	5(1)	6(1)	7(1)	8(1)
1		1(0)	3(1)	6(2)	10(3)	15(4)	21(5)	28(6)
½			1(0)	4(1)	10(3)	20(6)	35(10)	56(15)
0				1(0)	5(1)	15(4)	35(10)	70(20)
–½					1(0)	6(1)	21(5)	56(15)
– 1						1(0)	7(1)	28(6)
– 3/2							1(0)	8(1)
– 2								1(0)

где λ – спиральность, принимающая значения $1, ½, 0, -½, -1$ в теории Янга – Миллса и значения $2, 3/2, 1, ½, 0, -½, -1, -3/2, -2$ в супергравитации, а $d(\lambda)$ – число состояний со спиральностью λ в супермультиплете. Замечательно, что имеют место следующие обобщения равенства (3.1), впервые опубликованные Кертрайтом [25]:

$$\sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} d(\lambda) \lambda^k = 0, \quad N > k . \tag{3.2}$$

О существовании такого правила сумм автору данных лекций впервые сообщил в 1980 г. А. Д' Адда, который высказал предположение, что они связаны с обращением в нуль β-функции. Доказательство этого соотношения было дано (для супер-янг-миллсовской теории и теории супергравитации) Даффом и Гиббонсом (не опубликовано) независимо от Кертрайта. Ввиду того что рассуждение Кертрайта несколько отличается от нашего, мы приведем оба вывода и продемонстрируем их эквивалентность. Имеется и еще одно отличие чисто технического характера: Кертрайт вычислял β-функцию на основе анализа диаграмм Фейнмана, проделанного в работе [97]. Мы же воспользуемся формализмом для произвольного спина в рамках метода фонового поля [17, 19, 20].

Б. Метод фонового поля

Рассмотрим произвольную теорию поля с полями, обозначенными общим символом $\hat{\varphi}^i(x)$, и действием $S[\hat{\varphi}]$. Если произвести разбиение

$$\hat{\varphi}(x) = \varphi(x) + h(x) \tag{3.3}$$

и разложить действие S в ряд Тэйлора по фоновому полю $\varphi(x)$, мы получим

$$S[\varphi + h] = S[\varphi] + \int d^4x \left.\frac{\delta S}{\delta\hat{\varphi}^i(x)}\right|_{\hat{\varphi}=\varphi} h^i(x) +$$

$$+ \int d^4x\, d^4y\, h^i(x) \left.\frac{\delta^2 S}{\delta\hat{\varphi}^i(x)\,\delta\hat{\varphi}^j(y)}\right|_{\hat{\varphi}=\varphi} h^j(y) + O(h^3). \tag{3.4}$$

Заметим, что члены, линейные по квантовому полю $h(x)$, отсутствуют, если φ – решение классических уравнений для фонового поля

$$\left.\frac{\delta S}{\delta\hat{\varphi}}\right|_{\hat{\varphi}=\varphi} = 0.$$

Это обстоятельство будет играть важную роль при анализе квантовой гравитации с космологической постоянной, который будет составной частью исследования калибровочной супергравитации. В рамках однопетлевого приближения в разложении (3.4) нам нужны лишь члены, квадратичные по h.

Квантовое эффективное действие $\Gamma[\varphi]$ в этом случае таково:

$$e^{i\Gamma[\varphi]} = e^{iS[\varphi]} e^{iW[\varphi]}, \tag{3.5}$$

где W определяется функциональным интегралом:

$$e^{iW[\varphi]} = \int dh \exp\left(i\int d^4x \frac{1}{2} h^i \Delta_{ij} h^j\right). \tag{3.6}$$

Если h – бозонное поле, то

$$e^{iW[\varphi]} = (\det\Delta)^{-1/2}. \tag{3.7}$$

Здесь Δ_{ij} – дифференциальный оператор второго порядка, определяемый второй функциональной производной действия S в выражении (3.4), и одновременно функционал фонового поля φ. Графически эффективное действие $W[\varphi]$

описывает все однопетлевые диаграммы с замкнутыми петлями полей h и внешними линиями полей φ. Выбор поля φ в качестве решения классических уравнений поля отвечает переходу на массовую оболочку. Оказывается, что для интересующих нас теорий можно всегда добиться (например, путем фиксации калибровки) того, что Δ_{ij} примет простой вид:

$$\Delta^{ij} = -\delta^{ij}\,\nabla^{\mu}\,\nabla_{\mu} + X^{ij}, \tag{3.8}$$

где

$$\nabla_{\mu}\, h^{i} = \partial_{\mu} h^{i} + N_{\mu}{}^{ij} h_{j} \tag{3.9}$$

и где матрицы X^{ij} и $N_{\mu}{}^{ij}$ являются функционалами фонового поля φ, такими, что

что $N_{\mu}{}^{ji} = -N_{\mu}{}^{ij}, \quad X^{ij} = X^{ji}$. $\qquad$ (3.10)

С другой стороны, если h – фермионное поле, то мы имеем

$$e^{iW[\varphi]} = \det\hat{D} = (\det\Delta)^{1/2}\,, \tag{3.11}$$

где

$$\Delta = \hat{D}^{2} = -\nabla^{\mu}\nabla_{\mu} + X, \tag{3.12}$$

$$\nabla_{\mu} = \partial_{\mu} + N_{\mu}. \tag{3.13}$$

Здесь $\hat{D}$ – оператор Дирака в фоновом поле φ. В большинстве случаев φ будет бозонным полем. Поэтому вычисление для фермионов может быть сведено к вычислению для бозонов. В обоих случаях мы имеем дело с операторами вида (3.8), но при переходе от (3.7) к (3.11) меняется знак.

Показатель степени ½ в уравнении (3.11) в случае действительного, т.е. майорановского, спинора заменяется показателем ¼.

Выпишем теперь без доказательства однопетлевой контрчлен $\mathfrak{L}_{(1)}$, который следует добавить к исходному действию, чтобы сделать действие W конечным. Определяя матрицу

$$Y_{\mu\nu}{}^{ij} = -Y_{\mu\nu}{}^{ji} \tag{3.14}$$

соотношением $[\nabla_{\mu}\,\nabla_{\nu}]h^{i} = Y_{\mu\nu}{}^{ij} h_{j}$, $\qquad$ (3.15)

т.е. $Y_{\mu\nu} = \partial_{\mu} N_{\nu} - \partial_{\nu} N_{\mu} + [N_{\mu}, N_{\nu}]$, $\qquad$ (3.16)

мы имеем

$$\mathfrak{L}_{(1)} = \pm\frac{1}{\varepsilon}\,\frac{1}{180(4\pi)^{2}}\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\Big[\mathbb{1}\Big(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{5}{2}R^{2} -$$

$$- 30 D^{2} R\Big) - 30 RX + 90 X^{2} + 15 Y_{\mu\nu}\,Y^{\mu\nu}\Big], \tag{3.17}$$

где плюс отвечает бозону, а минус – фермиону. В выражении (3.17) мы допустили возможность отличного от нуля фонового гравитационного поля в дополнение

к остальным фоновым полям. Этот результат можно получить, либо выписав наиболее общую форму допустимого контрчлена и фиксировав численные коэффициенты с помощью диаграммной техники в импульсном пространстве, либо взяв за основу разложение ядра "уравнения теплопроводности" в координатном пространстве (последний метод более предпочтителен при анализе космологического, топологического и граничных членов). Соответствующие ссылки могут быть найдены в работе [19].

Как явствует из выражения (3.17), задача вычисления однопетлевых контрчленов сводится к задаче определения матриц X и $Y_{\mu\nu}$ для рассматриваемой системы. В том случае, когда калибровочная группа есть "внутренняя" группа Янга – Миллса, квантовое поле h^i преобразуется так:

$$h^i \to \Omega^{ij} h_j \,, \tag{3.18}$$

где $\Omega^{ij} = \exp(\varepsilon^a(x) T_a^{ij})$ (3.19)

и где генераторы T_a удовлетворяют соотношению

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c \,. \tag{3.20}$$

Ковариантная производная и напряженность поля Янга – Миллса $F_{\mu\nu}{}^a$ даются выражениями

$$\nabla_\mu h^i = \partial_\mu h^i + A_\mu{}^a T_a{}^{ij} h_j \,, \tag{3.21}$$

$$Y_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] = \tag{3.22}$$

$$= F_{\mu\nu}{}^a T_a \,. \tag{3.23}$$

В том случае, когда калибровочная группа является "внешней" группой Лоренца, преобразование имеет вид

$$h^\alpha \to \Omega^{\alpha\beta} h_\beta \,, \tag{3.24}$$

где α – произвольный спиновый индекс, а

$$\Omega^{\alpha\beta} = \exp \omega^{ab}(x) \Sigma_{ab}^{\alpha\beta} \,. \tag{3.25}$$

Генераторы группы Лоренца Σ_{ab} удовлетворяют соотношениям

$$[\Sigma_{ab}, \Sigma_{cd}] = \frac{1}{2}(\eta_{cb}\Sigma_{ad} - \eta_{ca}\Sigma_{bd} + \eta_{bd}\Sigma_{ca} - \eta_{da}\Sigma_{cb}), \tag{3.26}$$

$$\Sigma_{ab} = -\Sigma_{ba} \,. \tag{3.27}$$

Ковариантная производная имеет вид

$$\nabla_\mu h^\alpha = \partial_\mu h^\alpha + \omega_\mu{}^{ab} \Sigma_{ab}^{\alpha\beta} h_\beta \,, \tag{3.28}$$

а соответствующая кривизна дается выражением

$$Y_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu] = \qquad (3.29)$$

$$= R^{ab}_{\mu\nu} \Sigma_{ab} , \qquad (3.30)$$

где $R^{ab}_{\mu\nu}$ – тензор Римана.

В теориях типа теории Янга – Миллса кривизна $Y_{\mu\nu}$, согласно формуле (3.23), зависит от внутреннего представления квантового поля, распространяющегося по петле, но не зависит от спина. Зависимость от спина входит через

$$X = -\Sigma^{\mu\nu} F^a_{\mu\nu} T_a . \qquad (3.31)$$

Замечательно, что эта формула справедлива при любом значении спина, т.е. h^i может быть скалярным, спинорным или самим векторным калибровочным полем (или соответствующими скалярными духами). Аналогично в гравитации кривизна $Y_{\mu\nu}$, как видно из выражения (3.30), уже линейна по $\Sigma_{\mu\nu}$, а величина X квадратична, например

$$X = -\Sigma^{\mu\nu} R^{ab}_{\mu\nu} \Sigma_{ab} . \qquad (3.32)$$

Остается лишь вычислить след в (3.17). Соответствующие формулы для произвольного спина и вычисление необходимых следов можно найти в работе [19], результаты которой мы кратко изложим ниже.

В. Теория для произвольного спина

Неприводимые представления группы Лоренца нумеруются парой неотрицательных чисел (A, B), принимающих целые или полуцелые значения. Размерность представления, т.е. число степеней свободы, дается формулой

$$D(A, B) = (2A + 1)(2B + 1) = (s + 1)^2 - t^2 ,$$

где *спин* s есть

$$s \equiv A + B \qquad (3.33)$$

и где

$$t \equiv A - B , \qquad -s \leqslant t \leqslant s . \qquad (3.34)$$

Однако частицы, указанные в табл. 1 и 2, в общем случае не описываются одним неприводимым представлением. Каждая из них соответствует двум степеням свободы (считая скаляры комплексными), так что при $s \geqslant 1$ для получения ровно двух состояний спиральности необходимо вычесть вклады духов Фаддеева – Попова. Общее правило таково [46]: сначала следует вычислить вклад в выражение (3.17) представления (A, B), сложить его с вкладом представления $(A - 1, B - 1)$, а затем вычесть удвоенный вклад представления $(A - ½, B - ½)$. Например, число степеней свободы дается не формулой

$$\mathrm{Tr}\, \mathbb{1} = D(A, B) = (2A + 1)(2B + 1), \qquad (3.35)$$

а формулой

$$D^{\bullet}(A,B) = D(A,B) + D(A-1,\ B-1) - 2D(A-\tfrac{1}{2},\ B-\tfrac{1}{2}) = 2. \qquad (3.36)$$

При взятии следов произведений матриц Σ встречаются также функции

$$E_{\pm}(A,B) = D[\,A(A+1) \pm B(B+1)] \qquad (3.37)$$

в случае двух матриц Σ и функции

$$F_{\pm}(A,B) = D[A(A+1)(2A-1)(2A+3) \pm B(B+1)(2B-1)(2B+3)], \qquad (3.38)$$

$$G(A,B) = D[A(A+1) + B(B+1)]^2 \qquad (3.39)$$

в случае четырех матриц Σ (лишь эти два случая представляют интерес в рамках однопетлевого приближения). Если выразить указанные функции через s и t, а затем вычислить соответствующие величины со штрихами аналогично (3.36), то мы убедимся, что

$$\begin{aligned}
D^{\bullet} &= 2,\\
D^{\bullet}_{+} &= 6s^2,\\
F^{\bullet}_{+} &= -15s^2 + 15s^4 + t^2(5 - 5t^2 + 30s^2), \qquad (3.40)\\
E^{\bullet}_{-} &= 6st,\\
F^{\bullet}_{-} &= -10st + 40s^3t,\\
G^{\bullet} &= \frac{3}{2}s^2 + \frac{15}{2}s^4 + t^2\left(\frac{1}{2} - \frac{t^2}{2} + 3s^2\right).
\end{aligned}$$

Как мы увидим в этом параграфе и в § 4, эти функции дают все необходимое для получения β-функций, однопетлевых контрчленов, а также конформных и аксиальных аномалий для полей с произвольным спином как в теории Янга – Миллса, так и в гравитации.

Г. Суперсимметричная теория Янга – Миллса: $\beta = 0$ *при* $N > 2$

В плоском пространстве однопетлевой контрчлен (3.17) принимает вид

$$\mathcal{L}_{(1)} = \pm\frac{1}{\varepsilon}\frac{1}{(4\pi)^2}\,\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{12}Y_{\mu\nu}Y^{\mu\nu}\right]. \qquad (3.41)$$

В случае суперсимметричной теории Янга – Миллса по петлям будут распространяться квантовые калибровочные поля со спином 1, их духи со спином 0, фермионы со спином 1/2 и физические скаляры со спином 0. В каждом случае X и $Y_{\mu\nu}$ даются формулами (3.23) и (3.31). Следовательно,

$$\mathrm{Tr}\,Y_{\mu\nu}Y^{\mu\nu} = -DF_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a}C, \qquad (3.42)$$

$$\mathrm{Tr}\,X^2 = \frac{2}{3}(E_{+}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a} + E^{*}_{-}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a})C, \qquad (3.43)$$

где $F_{\mu\nu}{}^{a}$ – напряженность фонового калибровочного поля, ${}^*F_{\mu\nu}{}^{a}$ – дуальная

напряженность,

$$*F_{\mu\nu}{}^{a} \equiv \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho}F^{\sigma\rho a}\,, \tag{3.44}$$

D и $E_{\pm}$ – функции, которые даются уравнениями (3.35) и (3.37), а C – оператор Казимира второго порядка:

$$-\,\delta^{ab}C = \mathrm{Tr}\,(T^{a}T^{b}). \tag{3.45}$$

В случае физических полей мы заменяем D и $E_{\pm}$ функциями D^{*} и $E^{*}_{\pm}$ [формула (3.40)] и получаем контрчлен

$$\mathfrak{L}_{(1)} = \frac{C}{\varepsilon}\;\frac{(-1)^{2s}}{(4\pi)^{2}}\;e^{2}\Big[\Big(-\frac{1}{6}+2s^{2}\Big)F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a}+2st\,{}^{*}F_{\mu\nu}{}^{a}F_{a}{}^{\mu\nu}\Big], \tag{3.46}$$

где e – калибровочная константа: $A_{\mu}\to eA_{\mu}$.
Оставляя в стороне топологический контрчлен

$$P = \frac{e^{2}}{32\pi^{2}}\int d^{4}x\,{}^{*}F_{\mu\nu}{}^{a}F^{\mu\nu a}\,, \tag{3.47}$$

найдем однопетлевую β-функцию для e. Вклад в β частицы со спином s дается коэффициентом при $-\varepsilon^{-1}e^{-1}F_{\mu\nu}{}^{a}F_{a}{}^{\mu\nu}$ в формуле (3.46), т.е.

$$\beta(s) = \frac{e^{3}}{96\pi^{2}}\,(-1)^{2s}(1-12s^{2})\,C. \tag{3.48}$$

Это выражение совпадает с результатом Хьюеза [97] и Кертрайта [24], которые интерпретировали первый член в выражении (3.48) как вклад "конвективного заряда", а второй – как вклад "магнитного момента". Асимптотическая свобода в теории Янга – Миллса (т.е. $\beta < 0$ при $s = 1$) получается как следствие того, что отрицательный вклад магнитного момента доминирует над положительным вкладом конвективного заряда (подобная интерпретация была предвосхищена Саламом и Стретди [122]). Если в теории имеются несколько полей, то полная однопетлевая β-функция получается умножением выражения (3.48) на число $d(s)$ полей со спином s и суммированием по спинам:

$$\beta = \sum_{s} d(s)\,\beta(s). \tag{3.49}$$

В случае суперсимметричной теории Янга – Миллса фактор внутренней симметрии C одинаков для всех спинов, так как все поля принадлежат одному и тому же (присоединенному) представлению калибровочной группы. Теперь мы можем воспользоваться спиновыми правилами сумм (3.2), в частности,

$$\sum_{s}(-1)^{2s}d(s) = 0 \quad \text{при всех } N, \tag{3.50}$$

$$\sum_{s}(-1)^{2s}d(s)\,s^{2} = 0 \quad \text{при } N > 2. \tag{3.51}$$

(Заметим, что в правилах сумм для четных степеней λ мы можем заменить спиральность λ спином s при условии, что добавлены CPT-сопряженные мультиплеты и что при суммировании по $s = 0$, $1/2$ и 1 величина $d(0)$ есть число *комплексных* скаляров.)

Важнейший вывод состоит в том, что обращение в нуль однопетлевой β-функции для теории с $N = 4$ не является более "чудом", а есть очевидное следствие правил сумм (3.50) и (3.51), примененных к общим выражениям для произвольного спина (3.48) и (3.49). Первый член в (3.48) сокращается при всех N, тогда как второй – лишь при $N > 2$ (при $N = 1$ и $N = 2$ вклад второго члена обеспечивает асимптотическую свободу).

Что можно сказать про старшие петли? Независимо от правил сумм мы знаем, что теория с $N = 4$ конечна по крайней мере в трехпетлевом приближении и есть основания полагать, что она конечна во всех порядках [67, 135, 160 – 162]. Можно ли объяснить это с точки зрения правил сумм? Для начала отметим, что вне рамок однопетлевого приближения не имеет смысла говорить о вкладах в β каждого отдельного спина, как в формуле (3.48) (вклады разных спинов смешиваются). Вследствие этого естественно ожидать появления сумм по всем спинам, как в формуле (3.49). Можно попытаться принять для точной β-функции выражение

$$\beta = \sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} d(\lambda)[a + b\lambda^2] \tag{3.52}$$

(a и b – универсальные функции константы связи), так как оно корректно воспроизводит однопетлевой результат при

$$a = \frac{e^3}{96\pi^2} C, \qquad b = -\frac{e^3}{6\pi^2} C. \tag{3.53}$$

Мы не включили в сумму степени λ выше второй; иначе было бы невозможно объяснить равенство нулю функции β с учетом вкладов и трех петель в теории с $N = 4$ на основе правил сумм (3.50) и (3.51). Подобная формула не могла бы быть справедливой вне однопетлевого приближения в несуперсимметричных теориях, так как для них калибровочная, юкавская и четвертичная скалярная константы связи (одинаковые в суперсимметричных теориях Янга – Миллса) в общем случае различны. В суперсимметричном случае член, пропорциональный a, в формуле (3.52) обращается в нуль при всех N ввиду равенства (3.50). Принимая это во внимание, мы имеем окончательную формулу

$$\beta = b \sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} \lambda^2 ,$$

которая, хотя и согласуется с равенством функций β нулю при $N = 4$, не воспроизводит другого удивительного результата, а именно равенства нулю двухпетлевого вклада в β при $N = 2$, но не при $N = 1$ [100]. Для объяснения последнего обстоятельства нам пришлось бы отказаться от универсальности коэффициента b и ввести в двухпетлевой вклад член $\Sigma\ (-1)^{2\lambda}\lambda$, который, согласно формуле (3.2), отличен

от нуля при $N = 2$, но не при $N = 1$. Итак, простейшее выражение (3.52) не приемлемо. По-видимому, пока следует оставить попытки отгадать точный ответ и, оставаясь в рамках одной петли, обратиться к супергравитации.

Д. Калибровочная расширенная супергравитация: $\beta = 0$ при $N > 4$

Расширенные супергравитации с N гравитино инвариантны относительно глобальной $SO(N)$-симметрии. Кроме того, $N(N-1)/2$ полей со спином 1 принадлежат присоединенному представлению этой группы (табл. 2). (При $N = 6$ имеется один дополнительный вектор.) Это указывает на возможность локализации $SO(N)$-симметрии, т.е. замены обычных производных $SO(N)$-ковариантными и соответствующей ковариантизации векторного кинетического члена. Тогда мы получим новую безразмерную константу связи e в дополнение к уже имеющейся размерной константе κ. Остается доказать, однако, что можно сохранить N-расширенную суперсимметрию путем введения зависящих от e добавок в лагранжиан и законы преобразования. Что это действительно удается сделать непротиворечивым образом, было продемонстрировано при $N = 2$ и $N = 3$ [74, 75]. При $N = 4$ [25, 76] и, наконец, при $N = 5$, 6, 7 и 8 [40, 41]. При этом градуированная алгебра Пуанкаре заменяется градуированной алгеброй Де Ситтера и в лагранжиане появляется космологический член

$$\Lambda = -\frac{6e^2}{\kappa^2} \tag{3.54}$$

и "массовый" член для гравитино

$$m^2 = \frac{2e^2}{\kappa^2}\quad . \tag{3.55}$$

Равенство (3.54) имеет одно интересное следствие. Поскольку калибровочная константа связана с космологической постоянной, перенормировкой произведения $\kappa^2\Lambda$ определяется функция $\beta(e)$. Следовательно, чтобы найти β, мы можем вычислить либо суммарный вклад в коэффициент при янг-миллсовском контрчлене $\mathrm{Tr}\sqrt{g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ полей со спинами 0, 1/2, 1 и 3/2 (гравитон является синглетом), либо коэффициент при контрчлене $\sqrt{g}$, в который дают вклад все поля, в том числе и гравитационное. Оба коэффициента связаны между собой в силу суперсимметрии.

Ввиду того, что перенормировка космологического члена была найдена ранее [19] для спинов 0, 1/2, 1 и 2, было естественно выбрать второй путь, распространяя вычисления на случай спина 3/2 и, следовательно, расширенных калибровочных теорий супергравитации [21]. Замечательным образом оказалось, что $\beta > 0$ при $N \leqslant 4$, тогда как при $N > 4$ величина $\beta = 0$! Впоследствии Кертрайт [24] получил тот же результат, вычислив β первым способом [1].

---

[1] Объяснение совпадения результатов работ [21] и [24] было дано в работах [137, 165]. — *Прим. перев.*

Ниже мы изложим оба подхода, покажем, что они приводят к эквивалентным результатам, и в обоих случаях объясним равенство нулю β-функции при $N > 4$ с точки зрения спиновых правил сумм. Но вначале скажем несколько слов о квантовании гравитации с космологической постоянной.

Е. Космологическая постоянная

В большинстве предыдущих исследований свойств перенормируемости квантовой гравитации и супергравитации рассматривался случай равной нулю космологической постоянной Λ. Однако вопреки распространенному мнению, вычисление квантового эффективного действия при $\Lambda \neq 0$, т.е. для гравитационного действия

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{g}\,(R - 2\Lambda), \tag{3.56}$$

не сложнее, чем в случае $\Lambda = 0$, при условии, что используется согласованное разложение около фонового поля, удовлетворяющего уравнениям Эйнштейна с Λ-членом [20]

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{3.57}$$

В частности, следует избегать разложения около плоского пространства, которое не является правильным основным состоянием при $\Lambda \neq 0$. Попытка разложения $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \kappa h_{\mu\nu}$ приводит к трудностям из-за линейного и квадратичного членов по $h_{\mu\nu}$, которые возникают из $\sqrt{g}$. Первый порождает плохо определенные диаграммы-"головастики", а второй — массивные духи.

Как было объяснено в п. Б, линейные по квантовому полю h члены отсутствуют, когда фоновое поле является решением классических уравнений поля [формула (3.4)]. Квадратичные по h члены, которыми определяется однопетлевое приближение, в подходящей калибровке [и с учетом равенства (3.57)] даются операторами

$$\Delta h_{\mu\nu} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}h_{\mu\nu} - 2R_{\mu\rho\nu\sigma}h^{\rho\sigma} \tag{3.58}$$

для гравитона и

$$\Delta h_{\mu} = -\nabla^{\rho}\nabla_{\rho}h_{\mu} - \Lambda h_{\mu} \tag{3.59}$$

для духов Фаддеева — Попова со спином 1. Однопетлевые контрчлены можно найти из выражения (3.17). Они имеют вид суммы членов $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, R^2, ΛR и Λ^2 с коэффициентами, зависящими от калибровки. Независимость от выбора калибровки достигается после перехода на массовую оболочку (3.57). Соответствующий однопетлевой контрчлен таков:

$$S_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon}\left[A\chi - \frac{B\kappa^2\Lambda}{12\pi^2}S\right], \tag{3.60}$$

где A и B – численные коэффициенты, величина

$$\chi \equiv \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\sqrt{g}\,(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2) \tag{3.61}$$

есть эйлерова характеристика (§ 4), а S – классическое действие на массовой оболочке. Явные вычисления [20] показывают, что

$$A = \frac{106}{45}\,, \qquad B = -\frac{87}{10}\,. \tag{3.62}$$

Таким образом, в отличие от случая $\Lambda = 0$, рассмотренного в § 2, свободная теория гравитации с космологической постоянной уже не является конечной в однопетлевом приближении (даже оставляя в стороне топологическую расходимость) ввиду того, что $B \neq 0$.

Можно выполнить аналогичные вычисления в случае супергравитации с $N = 1$ с "массовым" членом у гравитино

$$S = \int d^4x \det e_\mu{}^a\Big[-\frac{1}{2\kappa^2}R + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\psi_\mu\gamma_5\gamma_\nu D_\rho\psi_\sigma +$$

$$+ m\bar\psi_\mu\sigma^{\mu\nu}\psi_\nu + \frac{1}{3}(S^2 + P^2 - b^\mu b_\mu) + \frac{2m}{\kappa}S\Big]. \tag{3.63}$$

Исключение вспомогательного поля S приводит к космологической постоянной $\Lambda = -3m^2$ (см., например, [148]; теории супергравитации с космологической постоянной ранее рассматривались в работах [108, 37, 145]). Однопетлевой контрчлен снова имеет вид (3.60), но для S нужно взять выражение (3.63), вычисленное на массовой оболочке. Коэффициенты A и B определяются вкладами как гравитона, так и гравитино (с соответствующим массовым параметром). Явные вычисления [21] показали, что

$$A = \frac{41}{24}\,, \qquad B = -\frac{77}{12}\,, \tag{3.64}$$

т.е. вновь имеются отличия от случая $\Lambda = 0 = m$, рассмотренного в § 2, а именно простая супергравитация с $m \neq 0$ уже не является конечной в одной петле.

Теперь мы можем скомбинировать эти результаты с аналогичными для спинов 1, 1/2 и 0 [20] и применить их к расширенным супергравитациям с калибровочной $SO(N)$-симметрией. "Космологический" коэффициент B приобретает теперь новый смысл: в силу суперсимметрии им определяется также перенормировка калибровочной константы связи e. С учетом равенства (3.54) из формулы (3.60) получаем

$$S_{(1)} = \frac{1}{\varepsilon}\Big[A\chi + B\frac{e^2}{2\pi^2}S\Big], \tag{3.65}$$

где классическое действие S теперь содержит вклад $\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ векторного калибровочного поля. Случаю асимптотической свободы соответствует $B > 0$.

Чтобы найти вклады различных спинов в A, нужно знать лишь кинетические члены в лагранжиане (см. работу [17] и цитируемую в ней литературу). Для вычисления B необходима еще и информация о массовых членах. Все частицы, согласно нашему предположению о ненарушенной суперсимметрии, должны быть безмассовыми при всех N. Тем не менее имеется "наивный" массовый параметр у гравитино (3.55). Подобные члены отсутствуют для полей со спинами 1 и 1/2. Поля со спином 0, впервые появляющиеся при $N \geqslant 4$, требуют специального анализа. Взаимодействие гравитонов со скалярным полем, как известно, определяется лагранжианом

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{g}\,(R-2\Lambda) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varphi^i\left(-\Box + \frac{2\Lambda}{3}\right)\varphi^i + O(\varphi^3), \tag{3.66}$$

т.е. оно представляет собой минимальное взаимодействие с массовым членом (значения, которые пробегает индекс i, указаны в табл. 2). Однако с равным успехом можно исходить из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\kappa^2}\sqrt{g}\,(R-2\Lambda) + \frac{1}{2}\sqrt{g}\,\varphi^i\left(-\Box + \frac{R}{6}\right)\varphi^i + O(\varphi^3), \tag{3.67}$$

т.е. из конформного взаимодействия без массового члена. Эквивалентность лагранжианов (3.66) и (3.67) доказывается путем преобразования Вейля

$$g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad \varphi^i \to \Omega^{-1}\varphi^i, \quad \Omega^2 \equiv 1 + \frac{\kappa^2}{6}\varphi^i\varphi^i. \tag{3.68}$$

Оба лагранжиана приводят к одинаковому значению коэффициента B, так как из уравнений поля следует, что $R = 4\Lambda + \ldots$. Отметим, что предположение об указанных свойствах массовых членов было сделано при $N > 4$ в работе [21] (где впервые вычислялись коэффициенты B) на основе известных в то время результатов для $N = 4$ [25, 76]. Существование калибровочных супергравитаций с $N > 4$ и свойства массовых членов были впоследствии подтверждены Де Витом и Николаи [40, 41].

Во всех этих теориях отсутствует линейный по φ член в потенциале скаляров. В этом пункте они отличаются от альтернативной теории с $N = 4$ Фридмана и Шварца [76] (имеющей киральную $SU(2) \times SU(2)$-симметрию и две независимые калибровочные константы), которую мы не будем рассматривать. Правда, все калибровочные теории супергравитации со скалярами имеют очевидный недостаток — неограниченность снизу потенциала $V(\varphi)$. Но ввиду тесной связи между $V(\varphi)$ и Λ может оказаться, что критерий стабильности при $\Lambda \neq 0$ отличен от принятого. В конце концов как мы уже отмечали, независящее от x вакуумное значение для $g_{\mu\nu}$ не отвечает корректному основному состоянию при $\Lambda \neq 0$; то же самое может относиться и к скалярам. Данный вопрос требует дальнейшего изучения [1)].

[1)] Такое исследование было выполнено в работах [166, 167], в которых был сформулирован критерий стабильности в (анти) деситтеровом пространстве и доказана устойчивость суперсимметричных вакуумов в $SO(N)$-калибровочных теориях супергравитации. — *Прим. перев.*

Таблица 3

Вклады полей со спином s в космологический коэффициент B и калибровочную β-функцию (для удобства в случае спина 0 результат приведен для двухкомпонентного, т.е. комплексного, скаляра)

s	$60B$	$96\pi^2\beta e^{-3}$
0	− 2	$C(0)$
1/2	− 3	$2C(1/2)$
1	− 12	$-11C(1)$
3/2	137	$26C(3/2)$
2	−522	0

Таблица 4

Значения величин B и β в расширенной супергравитации, показывающие эквивалентность двух разных методов вычисления

N	B	$-16\pi^2\beta e^{-3}$
1	− 77/12	−
2	− 13/3	− 13/3
3	− 5/2	− 5/2
4	− 1	− 1
5	0	0
6	0	0
7	0	0
8	0	0

Результаты вычисления коэффициента B для полей со спином s приведены в табл. 3. Суммарные результаты для расширенных супергравитаций (табл. 4) получаются с использованием известного состава частиц из табл. 2. Обращение коэффициента B в нуль при $N > 4$ кажется на первый взгляд "чудесным". Но нужно иметь в виду, что коэффициенты B из табл. 3 описываются полиномом 4-й степени:

$$60B(s) = (-1)^{2s}[-2 + 30s^2 - 40s^4] = \tag{3.69}$$

$$= \frac{1}{3}(-3D^{\bullet} + 25E^{\bullet}_{+} - 20G^{\bullet} + 2F^{\bullet}_{+}), \tag{3.70}$$

где $D^{\bullet}$, $E^{\bullet}_{+}$, $G^{\bullet}$ и $F^{\bullet}_{+}$ – функции (3.40). Это можно показать, выполнив вычисления для произвольного спина в рамках метода фонового поля, аналогичного описанному выше в случае поля Янга – Миллса. Чтобы объяснить равенство нулю коэффициента B при $N > 4$, остается лишь воспользоваться спиновыми правилами сумм

$$\sum_s (-1)^{2s} d(s)s^k = 0, \quad N > k. \tag{3.71}$$

Отметим, что в случае гравитационного фона полином в (3.69) имеет 4-ю степень, тогда как в случае фона Янга – Миллса степень полинома равна двум. Это связано с дополнительными лоренцевыми генераторами в матрицах X и Y [формулы (3.30) и (3.32)], отсутствующими в формулах (3.23) и (3.31). Ввиду перенормируемости теории Янга – Миллса наивное обобщение на старшие петли могло бы основываться на том, что во всех контрчленах $X^2 \sim s^2$ и, стало быть, правила сумм обеспечивают конечность теории при $N > 2$ во всех порядках. Однако такие же наивные рассуждения в гравитационном случае давали бы $X^3 \sim s^6$ в двух петлях, $X^4 \sim s^8$ в трех петлях и так далее Но даже прави-

ла сумм для $N = 8$ недостаточно для исключения членов с s^8. Впрочем, мы уже убедились ранее в опасности экстраполяций на старшие петли, основанных лишь на догадках. Вне сомнений по-прежнему необходимо более глубокое понимание сокращения расходимостей.

Ж. Перенормировка заряда

Найдя β-функцию для супергравитаций "космологическим" методом, мы теперь изложим альтернативный метод Кертрайта [24], который основан на экстраполяции выражения (3.48) для $\beta(s)$ на случай спина 3/2 (допустимость такой экстраполяции можно обосновать вычислениями для произвольного спина в рамках формализма фонового поля). Соответствующие коэффициенты β приведены в табл. 3. Как хорошо известно, вклады полей со спинами 0 и 1/2 по знаку противоположны вкладу калибровочного поля со спином 1. Вклад поля со спином 3/2 также имеет противоположный знак, т.е. препятствует асимптотической свободе. Вычисляя суммарные вклады мультиплетов расширенной супергравитации, мы получаем результаты табл. 4, которые полностью согласуются с результатами "космологического" метода. Объяснить же равенство β нулю при $N > 4$, исходя из спиновых правил сумм, несколько сложнее. Чтобы дать такое объяснение, необходимы новые правила сумм [24]

$$\sum_{\lambda} (-1)^{2\lambda} d(\lambda) \lambda^k C(\lambda) = 0, \quad N > \kappa + 2, \tag{3.72}$$

которые, как можно показать, следуют из старых правил (3.2). Таким образом, хотя функция $\beta(s)$, даваемая формулой (3.48), лишь квадратична по спину, зависимость от спина теперь содержится также в инварианте Казимира, и мы снова получаем $\beta = 0$ при $N > 4$.

Чтобы пояснить, как два таких, на первый взгляд различных, подхода приводят к одинаковому результату для всех N, мы напомним, что в "космологическом" методе вычисляется контрчлен $\sqrt{g}$, а в методе перенормировки заряда – контрчлен $\sqrt{g}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Но в силу суперсимметрии они должны быть пропорциональны друг другу. Действительно, согласно (3.65), единственный (оставляя в стороне χ) контрчлен, дающий вклад на массовой оболочке, есть само классическое действие. В первом методе оно имеет коэффициент $Be^2(2\pi^2\varepsilon)^{-1}$, а во втором – коэффициент $-8\beta(e\varepsilon)^{-1}$. Следовательно,

$$B = -\frac{16\pi^2}{e^3}\beta. \tag{3.73}$$

Это соотношение подтверждается явными вычислениями, результаты которых приведены в табл. 4. Интересно, что вклад гравитонных петель необходимо было найти лишь при вычислении левой части равенства (3.73).

Остается лишь вопрос о справедливости метода перенормировки заряда и экстраполяции выражения (3.48) для $\beta(s)$ на случай теории поля в искривленном пространстве. Эта функция β, равная коэффициенту при контрчлене $e^2\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, определяется вкладами двоякого рода. Помимо обычных эффек-

тов перенормировки заряда в принципе возможен также однопетлевой контрчлен вида $\kappa^2 R \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. С учетом уравнения поля $R = 4\Lambda + \ldots$ и соотношения $\kappa^2\Lambda = -6e^2$ его можно свести к дополнительному члену $e^2 \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$. Тот факт, что результаты обоих методов вычисления согласуются без учета этого дополнительного контрчлена, означает, что по крайней мере в однопетлевом приближении подобные контрчлены должны отсутствовать. Отсутствие указанного контрчлена *в однопетлевом приближении* действительно можно доказать для всех теорий Эйнштейна – Янга – Миллса, перейдя к пределу при $e \to 0$ и привлекая дуальную инвариантность теории Эйнштейна – Максвелла [28]. Но такое доказательство с переходом к пределу при $e \to 0$ не справедливо в многопетлевом приближении, в котором могут возникать контрчлены, содержащие старшие степени кривизны с зависящими от e коэффициентами и сводящиеся к $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ на массовой оболочке. Это может привести к удивительному эффекту изменения β-функций для теорий в плоском пространстве при включении взаимодействия с гравитацией с космологической постоянной. Можно предположить, что такие члены всегда отсутствуют в супергравитации.

Иногда говорят, что, поскольку константа связи κ – размерная величина, теории гравитации могут иметь смысл на квантовом уровне лишь как *конечные*, а не как *перенормируемые* теории. Это, очевидно, неверно, если вводится дополнительная безразмерная константа связи e. Действительно, рассмотренные теории с $N \leqslant 4$ перенормируемы в однопетлевом приближении, так как единственный отличный от нуля контрчлен здесь пропорционален классическому действию. То же самое будет справедливо с учетом двух петель, так как некалибровочные ($e = 0$) супергравитации конечны в двухпетлевом приближении. Что касается теорий с $N > 4$, то у них есть шанс остаться конечными даже после локализации внутренней группы.

В заключение отметим, что, хотя мы применяли спиновые правила сумм (3.2) и (3.72) к известным лагранжевым теориям поля – суперсимметричной теории Янга – Миллса и калибровочной $SO(N)$-супергравитации, – с теоретико-групповой точки зрения у них значительно более широкая область применимости. Например, как указал Кертрайт [24], они справедливы для всех супермультиплетов с внутренней симметрией $SO(N)$ или $SU(N)$, в частности для массивного мультиплета супертока с $N = 8$ [59, 26], возникающего при попытке интерпретировать наблюдаемые кварки, лептоны и бозоны как связанные состояния полей супергравитации с $N = 8$.

3. Массовые правила сумм и нарушение симметрии

Рассматривавшиеся выше *спиновые* правила сумм весьма сходны с *массовыми* правилами сумм, известными ранее в супергравитации, спонтанно нарушенной путем размерной редукции. Рассмотрим некалибровочные расширенные теории супергравитации, спонтанно нарушенные путем редукции из

пяти измерений [22, 68]. В этом случае выполняется соотношение

$$\sum_s (-1)^{2s}(2s+1)M_s^{2k} = 0, \quad N > 2k, \tag{3.74}$$

где M_s – масса частицы со спином s.

В отличие от (ненарушенных) калибровочных теорий супергравитации эти теории имеют нулевой Λ-член на древесном уровне, но приобретают конечный Λ-член за счет радиационных поправок. Однако благодаря массовым правилам сумм индуцированная космологическая постоянная конечна при $N \geqslant 6$. Другие вопросы, связанные со спонтанно нарушенной супергравитацией с $N = 8$ обсуждаются в работе [150].

§ 4. Аномалии и киральные суперполя

А. Аксиальные и конформные аномалии для произвольного спина

Формализм фонового поля для произвольного спина, который был изложен в § 3, может быть также использован для нахождения однопетлевых аномалий в обычной (т.е. некалибровочной) супергравитации. Рассмотрим, например, конформную аномалию в следе тензора энергии-импульса [11, 29, 45]

$$T^\mu_\mu = A \frac{1}{32\pi^2} {}^*R^*_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} + a \frac{e^2}{16\pi^2} F^{*}_{\mu\nu}{}^a F_a{}^{\mu\nu} C, \tag{4.1}$$

где A тот же коэффициент, что и в топологических контрчленах (3.60) и (3.65), а a – величина, которой определяется янг-миллсовский контрчлен (3.46). Можно показать [19], что

$$\begin{aligned} 12a &= (-1)^{2s}[-D' + 4E'_+], \\ 360A &= (-1)^{2s}[4D' - 10E'_+ + 6F'_+], \end{aligned} \tag{4.2}$$

где выражения для D', E'_+ и F'_+ – функции (3.40). Из этих соотношений следует, что

$$\begin{aligned} 6a &= (-1)^{2s}[-1 + 12s^2], \\ 360A &= (-1)^{2s}[8 - 150s^2 + 90s^4 + 30t^2(1 - t^2 + 6s^2)]. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Коэффициент A для полей e^a_μ, ψ_μ, φ_μ, χ и φ приведен в первом столбце табл. 5.

Таблица 5

Вклады в коэффициенты A и A' компонентных полей супергравитации. Представлены значения, соответствующие физическим полям (т.е. полученные после фиксации калибровки и вычитания вклада духов)

	$360\,A$	$360\,A'$	ΔA
$e_{\mu a}$	848	−232	3
ψ_μ	−233	127	−1
φ_μ	−52	−52	0
χ	7	7	0

	$360\,A$	$360\,A'$	ΔA
φ	4	4	0
$\varphi_{\mu\nu}$	364	4	1
$\varphi_{\mu\nu\rho}$	−720	0	−2

Если опустить член F'_+ в равенстве (4.2), то получится более простое соотношение

$$360A' = (-1)^{2s}(8 - 30s^2), \tag{4.4}$$

из которого следует (в силу правил сумм из § 4) равный нулю результат для супермультиплетов с $N > 2$. Соответствующие значения приведены в табл. 5. Как нетрудно заметить, разность $\Delta A = A - A'$ есть *целое* число. Мы вскоре вернемся к данному обстоятельству.

Аналогичное выражение для аксиальных аномалий дается теми же комбинациями E'_- в случае фона Янга – Миллса и E'_- и F'_- в случае гравитационного фона

$$\nabla^\mu J^5_\mu = \left(-\frac{E'_-}{6} + \frac{F'_-}{10}\right)\frac{1}{48\pi^2} R^*_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{2E'_-}{3}\,\frac{e^2}{8\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,F^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{4.5}$$

В частности, фермионы со спином 3/2 дают аксиальную аномалию, в 3 раза большую, чем фермионы со спином 1/2 в случае теории Янга – Миллса и в $3 - 24 = -21$ раз большую – в случае гравитации. Попутно отметим, что относительную величину янг-миллсовского и гравитационного вкладов, которые на первый взгляд кажутся независимыми, можно проверить исходя из топологических соображений. Интегральная форма равенства (4.5) приводит к "теореме об индексе"

$$n_+ - n_- = \left[-\frac{s}{2} + s^3\right]\frac{1}{48\pi^2}\int d^4x\,\sqrt{g}R^*_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} + s\,\frac{e^2}{8\pi^2}\int d^4x\,\sqrt{g}F^*_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

где n_+ и n_- – числа право- и лево-спиральных нулевых мод оператора Дирака для произвольного спина (за вычетом вклада духов при $s > 1/2$). Для простоты мы взяли абелево калибровочное поле. Каждый член в правой час-

ти уравнения (4.6) пропорционален топологическому инварианту и, как правило, каждый член по отдельности есть целое число. Однако в пространствах, которые не допускают обычной спинорной структуры, лишь их сумма будет целым числом [93, 116]. Например, в случае CP^2

$$n_+ - n_- = [-\frac{s}{2} + s^3] + se^2, \qquad (4.7)$$

где e – полуцелое число, так что правая часть действительно равна целому числу для всех полуцелых спинов. Можно воспользоваться этим, чтобы вычислить гравитационную аномалию исходя из калибровочной аномалии. Но это возможно лишь с точностью до целого числа (например, в случае спина 3/2 мы не можем отличить множитель –21 от +3, по крайней мере если не использовать более детальную информацию о CP^2). Вопрос об аксиальных аномалиях для произвольного спина рассматривается в статьях [117, 118].

Как мы видели выше, аномалия следа и β-функция выражаются через четные степени спина, а аксиальная аномалия – через нечетные. В этой связи отметим, что пока еще не удалось найти применение спиновых правил сумм (3.2) с нечетным k.

Применяя полученные результаты к суперсимметричным теориям Янга – Миллса, мы приходим к следующим выводам.

1. Конформные и аксиальные аномалии образуют один мультиплет с аномалией $\gamma^\mu S_\mu$, где S_μ – суперток. Это соответствует общим утверждениям о мультиплете аномалий [65] (см. также обзор [83]).

2. Аномалии обращаются в нуль при $N > 2$. Это – следствие равенства нулю β-функции при $N > 2$ (§ 3).

Таблица 6

(N – 1)-суперполевой состав расширенных теорий супергравитации, отвечающий стандартным представлениям физических и вспомогательных полей

N	H	ψ	V	X	φ	A	A	ΔA
1	1	–3	0	1	2	41/24	–7/24	2
2	1	–2	–1	2	1	–11/12	–1/12	1
3	1	–1	–1	0	0	0	0	1
4	1	0	0	–4	–1	–1	0	–1
5	1	1	2	–8	–2	–2	0	–2
6	1	2	6	– 12	–3	–3	0	–3
7	1	4	14	– 20	–5	–5	0	–5
8	1	4	14	–20	–5	–5	0	–5

Наивное применение полученных результатов к расширенным супергравитациям (со стандартными представлениями полей) приводит к менее понятным результатам.

1. Аномалии не образуют один супермультиплет [17].

2. Аномалии не обращаются в нуль при $N > 2$. Единственное упрощение состоит в том, что при $N > 2$ коэффициент A становится целым: $A = 3 - N$ [21] (табл. 6).

Прежде чем более подробно рассматривать случай супергравитации, мы обсудим аномалии для антисимметричных тензоров.

Б. *Антисимметричные тензоры: квантовая неэквивалентность*

Приведенные выше результаты для A в супергравитации справедливы при следующих, на первый взгляд невинных, предположениях: а) вспомогательные поля не дают вклада в аномалии; б) частицы со спином 0 описываются скалярными полями $\varphi(x)$. Можно показать, однако, что коэффициент A зависит не только от спина, но и от выбора представления соответствующего ему поля [58]. Так, теория калибровочного антисимметричного тензора второго ранга $\varphi_{\mu\nu}$ (с одной степенью свободы) отличается от теории действительного скаляра φ, а теория антисимметричного тензора третьего ранга (не описывающая динамических степеней свободы) не тождественна тривиальной. Конкретно,

$$\begin{aligned} &A[\varphi_{\mu\nu}] = A[\varphi] + 1, \\ &A[\varphi_{\mu\nu\rho}] = -2, \end{aligned} \tag{4.8}$$

что соответствует значениям, приведенным в табл. 5. Причины этой квантовой неэквивалентности подробно обсуждались ранее [49, 50]. Основное замечание состоит в том, что подобные нестандартные представления полей действительно могут иметь место либо для вспомогательных полей супергравитации с $N = 1$, либо для физических полей в вариантах расширенных супергравитаций, полученных размерной редукцией.

Изучение антисимметричных тензоров имеет долгую историю в теории поля. Автор благодарен проф. Кеммеру за указание на работу 1938 г. [106]. Среди других ранних работ отметим [112].

Например, теория с $N = 8$, полученная размерной редукцией из супергравитации с $N = 1$, $d = 11$ при условии, что "лишние" измерения образуют семимерный тор, содержит $63\varphi + 7\varphi_{\mu\nu} + \varphi_{\mu\nu\rho}$ [22]. Теория с 70φ получается лишь после топологически нетривиальных дуальных преобразований. Как указал Зигель [129], коэффициент A, равный -5 (табл. 6) после дуальных преобразований, в исходной теории с $N = 8$ есть

$$A' = -5 + 7 - 2 = 0. \tag{4.9}$$

При подходящем выборе представлений полей

$$3 - N[\psi_\mu] + N[\varphi_{\mu\nu}] - 2N[\varphi_{\mu\nu\rho}] = 0, \tag{4.10}$$

где $N[\psi_\mu]$, $N[\varphi_{\mu\nu}]$, $N[\varphi_{\mu\nu\rho}]$ – числа гравитино и антисимметричных тензоров, можно обеспечить равенство нулю коэффициента A при всех $N > 2$ [49,50]. В работе [109] показано, что теории супергравитации с $N \geqslant 3$, удовлетворяющие условию (4.10), могут быть построены из трех базисных мультиплетов с $N = 3$, один из которых содержит калибровочное антисимметричное поле.

Предположение, что, как и в случае теорий Янга – Миллса, аномалии в супергравитации равны нулю при $N > 2$, бесспорно привлекательно. Но здесь нужно ответить на ряд важных вопросов.

1. Почему вариант супергравитации с $N = 8$ с антисимметричными полями, имеющий $SO(7)$-симметрию, претендует на *лучшее* ультрафиолетовое поведение, чем вариант со скалярами, обладающий $E_7 \times SU(8)$-симметрией?

2. Следует ли добиваться выполнения равенства (4.10), рассматривая лишь физические поля или же следует учитывать и вспомогательные поля? Даже если мы ограничимся традиционной минимальной формулировкой супергравитации с $N = 1$ [138, 63], все равно имеется некоторый произвол в выборе представлений полей. Один или оба скаляра S и P могут быть заменены производными $\partial^\mu S_\mu$ или $\partial^\mu P_\mu$ [138, 113]. Полагая $\varphi_{\mu\nu\rho} = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} S^\sigma$, мы получаем теорию калибровочного антисимметричного тензора, обсуждавшуюся выше, а следовательно, и иные аномалии. Данная проблема становится еще более серьезной при $N > 2$, так как в этом случае не известно не только, каковы соответствующие вспомогательные поля, но даже существуют ли они!

3. Включив антисимметричные поля, можем ли мы утверждать, что теперь аномалии образуют мультиплет? Как мы видели, учет нестандартных представлений полей может изменить гравитационную конформную аномалию. В то же время антисимметричные тензоры могут давать вклад в гравитационную аксиальную аномалию лишь в том случае, если они описываются лагранжианом первого порядка [43, 110] (при описании с помощью лагранжиана второго порядка не удается построить треугольные диаграммы из имеющихся вершин)[1).

Может показаться странным, что бозоны описываются лагранжианом первого порядка, но такие кинетические члены действительно возникают при использовании явно суперсимметричной процедуры фиксации калибровки [87].

Можно дать простую иллюстрацию этого парадокса на примере скалярного мультиплета Весса – Зумино, состоящего из спинора, скаляра и псевдоскаляра. Поместив этот мультиплет во внешнее гравитационное поле, мы убедимся, что соответствующие аномалии также образуют мультиплет. Если за-

---

1) Как показано в работе [168], если фиксировать калибровку, удается корректно определить и вычислить аксиальную аномалию для антисимметричных тензоров с лагранжианом второго порядка. В результате конформная и аксиальная аномалии оказываются пропорциональными друг другу и равными нулю при $N \geqslant 3$. – *Прим. перев.*

менить псевдоскаляр калибровочным антисимметричным тензором, то получится новый супермультиплет [128]. При этом конформная аномалия изменится, но аксиальная аномалия, по-видимому, останется прежней.

4. Отмеченная выше квантовая неэквивалентность была установлена с использованием фоновой калибровки [58]. Как следует тогда относиться к утверждению Зигеля [129], что существует другой выбор калибровки, использующий плоскую метрику, для которого неэквивалентность не возникает? В этом случае аномалии для $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu\rho}$ будут определяться коэффициентом A', приведенным во втором столбце табл. 5.

5. Имеет ли важное значение то обстоятельство, что можно добиться равенства нулю аномалий при $N > 2$ даже с *обычными* представлениями полей, заменив коэффициент A коэффициентом A' из соотношения (4.4) и используя спиновые правила сумм?

6. Почему коэффициенты A' отличаются от коэффициентов A на *целые* числа (табл. 5)?

7. Почему минимальное значение числа N, при котором обращаются в нуль аномалии ($N = 3$), одинаково для случаев суперсимметричной теории Янга – Миллса и супергравитации? Что означает это обстоятельство в отношении поиска вспомогательных полей при $N > 2$?

Частичные ответы на эти вопросы можно найти, если проанализировать данную проблему, используя суперполя с $N = 1$ и суперполевые правила Фейнмана [87].

В. Киральные суперполя: отсутствие аномалий при $N > 2$

В данном пункте параграфа, написанном с помощью М. Грисару, я кратко изложу некоторые результаты работы [52]. Исходным пунктом является действие супергравитации с $N = 1$, зависящее от фоновых полей на массовой оболочке и разложенное с точностью до членов, квадратичных по квантовым полям (с учетом фиксации калибровки и духов) [87]:

$$S = \int d^4x \; d^4\theta \; E^{-1}\Big[-\frac{1}{2}H\Box H - \frac{1}{2}H^{\alpha\dot\beta}(W_\alpha^{\ \gamma\delta}D_\gamma H_{\delta\dot\beta} + \overline{W}_{\dot\beta}^{\ \dot\gamma\dot\delta}\overline{D}_{\dot\gamma}H_{\alpha\dot\delta}) -$$

$$- \frac{18}{5}X\overline{X} + \sum_{i=1}^{3}\overline{\Psi}_i^{\dot\beta}\, iD_{\alpha\dot\beta}\Psi_i^{\ \alpha} + \sum_{i=1}^{2}(\Phi_i^\alpha D^2\Phi_{i\dot\alpha} + \text{э. с.})\Big]; \qquad (4.11)$$

Здесь $H_{\alpha\dot\alpha}$ – физическое аксиально-векторное действительное суперполе, $\Psi_{\alpha i}$ – спинорные суперполя общего типа, имеющие "духовую" статистику, $\Phi_{\alpha i}$ – киральные спинорные суперполя, имеющие статистику "духов для духов", а X – киральное скалярное суперполе, которое представляет собой физическое компенсирующее суперполе. Зависимость от фоновых полей супергравитации входит через детерминант суперрепера E и $W_{\alpha\beta\gamma}$ [формула (2.9)]. В

Таблица 7

Коэффициенты A и A' для компонентных полей и суперполей с учетом фиксации калибровки, но *без учета* духов. Как и в случае суперсимметричной теории Янга – Миллса, *только киральные суперполя приводят к аномалиям*

Компоненты	360 A	360 A'	ΔA
$e_{\mu a}$	760	–320	3
$\psi_{\mu a}$	–212	148	–1
$\varphi_{\mu} = \varphi_{\mu\nu\rho}$	–44	–44	0
χ	7	7	0
φ	4	4	0
$\varphi_{\mu\nu}$	264	–96	1

Суперполя с $N = 1$	A	A'	ΔA	Киральность
$H_a = e_{\mu a} + 4\psi_{\mu} + 4\varphi_{\mu} + \varphi_{\mu\nu}$	0	0	0	Нет
$\Psi_a = \psi_{\mu} + 2\varphi_{\mu} + 4\chi + 2\varphi + \varphi_{\mu\nu}$	0	0	0	Нет
$V = \varphi_{\mu} + 4\chi + 4\varphi$	0	0	0	Нет
$X = \chi + 2\varphi$	1/24	1/24	0	Да
$\Phi_{\alpha} = 4\chi + 2\varphi + \varphi_{\mu\nu}$	5/6	–1/6	1	Да

компонентах это действие соответствует стандартному выбору вспомогательных полей (S, P, b_{μ}). Для описания N-расширенной супергравитации необходимо добавить вклады суперполей, соответствующих мультиплетам материи $\{3/2, 1\}$, $\{1, 1/2\}$ и $\{1/2, 0\}$ (с учетом фиксации калибровки и духов там, где это необходимо). Число суперполей каждого типа приведено в табл. 6, где V – действительное скалярное суперполе и где минусы означают "духовую" статистику. Состав полей стандартный, например теория с $N = 8$ содержит 70 скаляров.

Чтобы найти вклад каждого суперполя в однопетлевые аномалии, можно либо вычислить соответствующие суперграфы, пользуясь правилами Фейнмана для суперполей, либо воспользоваться известными результатами для компонентных полей. Во втором случае в качестве первого шага необходимо заменить вклады физических полей из табл. 5 (найденные *после* вычитания вкладов духов) их аналогами из табл. 7 (полученными *до учета* духов). Как явствует из табл. 7, имеет место следующий замечательный результат: *в аномалии дают вклад только киральные суперполя.* [В этом можно убедиться путем прямого подсчета степеней θ в вершинах и пропагаторах диаграмм Фейнмана в

Таблица 8

Выбор ($N-1$)-суперполей, приводящий к равенству $A = A'$. Отсутствие киральных суперполей при $N > 2$ приводит к равенству нулю аномалий

N	H	ψ	V	X	φ	$A = A'$
1	1	−3	4	−7	0	−7/24
2	1	−2	1	−2	0	−1/12
3	1	−1	−1	−1	0	0
4	1	0	−2	0	0	0
5	1	1	−2	0	0	0
6	1	2	0	0	0	0
7	1	4	4	0	0	0
8	1	4	4	0	0	0

суперпространстве (см. лекции Грисару в данной книге, с. 63).] Как следствие этого, при стандартных представлениях полей воспроизводятся уже приведенные ранее результаты для аномалий. В частности, коэффициент A оказывается целым при $N > 2$.

Существует, однако, действие, альтернативное действию (4.11) и приводящее к другому выбору представлений, в котором в качестве компенсирующего поля используется действительное скалярное суперполе V [87]:

$$S' = \int d^4x\, d^4\theta\, E^{-1}\Big[-\frac{1}{2}H\Box H - \frac{1}{2}H^{\alpha\dot\beta}\big(W_\alpha^{\gamma\delta}D_\gamma H_{\delta\dot\beta} + \overline{W}_{\dot\beta}^{\dot\gamma\dot\delta}D_{\dot\gamma}H_{\alpha\dot\delta}\big) + \sum_{i=1}^{4} V_i\Box V_i + \sum_{i=1}^{3}\overline{\Psi}_i^{\dot\beta}\, iD_{\alpha\dot\beta}\Psi_i^{\alpha} + \sum_{i=1}^{4} X_i\overline{X}_i\Big] \tag{4.12}$$

(Ψ и X имеют "духовую" статистику). Заметим, что киральное спинорное суперполе Φ_α здесь отсутствует. Переход к этому действию соответствует (для компонентных полей) замене одного из скалярных вспомогательных полей калибровочным антисимметричным тензором 3-го ранга. Исходя из (4.12), мы естественно приходим к составу суперполей, приведенному в табл. 8. На этой основе мы находим, что компонентные поля удовлетворяют соотношению (4.10), а следовательно, приводят к равенству нулю аномалий при $N > 2$. (Этот результат, по-видимому, указывает на связь между полем $\varphi_{\mu\nu\rho}$ как вспомогательным полем в супергравитации с $N = 1$ и полем $\varphi_{\mu\nu\rho}$, имеющимся в теории с $N = 8$, полученной размерной редукцией из супергравитации с $N = 1$ при $d = 11$.)

Возможно, однако, значительно более простое объяснение равенства нулю аномалий, если использовать суперполя (табл. 8). *Аномалии равны нулю при $N > 2$ по той причине, что полное число киральных суперполей (т.е. число физических суперполей минус число духовых) обращается в нуль при $N > 2$.* Между прочим, отсюда вытекает еще одно объяснение равенства нулю однопетлевой β-функции в супер-янг-миллсовской теории с $N > 2$, имею-

щей следующий спектр суперполей с $N = 1$: теория с $N = 1$ содержит одно физическое *некиральное* суперполе V и три духовых киральных суперполя X; теория с $N = 2$ – одно физическое поле V, одно физическое поле X и три духовых поля X; теория с $N = 4$ – одно физическое поле V, три физических поля X и три духовых поля X. Следовательно, β-функции при $N = 1, 2, 4$ находятся в отношении $3 : 2 : 0$, и нулевой результат для $N = 4$ связан с равенством нулю полного числа киральных суперполей.

Поскольку полное описание N-расширенных теорий супергравитации на основе N-*расширенных* суперполей отсутствует, мы не можем дать фундаментального объяснения тому факту, что в рассмотренном варианте полное число киральных суперполей с $N = 1$ обращается в нуль при $N > 2$. Ответ на этот вопрос, возможно, следует искать в результатах Каллош [159], проанализировавшей условия согласованности для расширенных суперполей и установившей принципиальное различие между случаями $N = 2$ и $N > 2$ (связанное с появлением фермионов со спином 1/2 в супергравитациях с $N \geqslant 3$). Из результатов работы [159] вытекает следующее: а) при $N > 2$ не существует расширенных киральных супермультиплетов материи во внешнем поле расширенной супергравитации (это, возможно, указывает на то, что при корректном анализе теорий с $N > 2$ на основе суперполей с $N = 1$ в рамках метода фонового поля полное число киральных суперполей с $N = 1$ должно быть равно нулю, чем обеспечивается отсутствие аномалий); б) при $N > 2$ не существует суперрасширения инварианта Гаусса – Бонне (последнее утверждение, очевидно, согласуется с первым).

г. Нулевые моды, фиксация калибровки и граничные условия

Мы еще не дали объяснения различию между коэффициентами A и A'. Рассмотрим сначала случай полей $\varphi_{\mu\nu}$ и $\varphi_{\mu\nu\rho}$. Используя ковариантную фоновую калибровку, авторы работы [58] показали, что имеет место "квантовая неэквивалентность различных представлений полей" [формула (4.8)]. В опубликованной позже работе Зигеля "Квантовая эквивалентность различных представлений полей" [129] при использовании другой калибровки было показано, что

$$A'[\varphi_{\mu\nu}] = A'[\varphi],$$
$$A'[\varphi_{\mu\nu\rho}] = 0. \tag{4.13}$$

На основе этого Зигель заключил, что конформные аномалии зависят от калибровки и, стало быть, не приводят к физическим следствиям. Здесь мы дадим другую интерпретацию этого результата.

Как подробно объясняется в работах [58, 50], квантовая неэквивалентность имеет топологическую причину. Рассмотрим p-форму A с внешним диф-

ференциалом dA и действием

$$S = \frac{1}{2}(dA,\ dA). \tag{4.14}$$

Действие S инвариантно относительно преобразования

$$A \to A + V, \tag{4.15}$$

где

$$dV = 0. \tag{4.16}$$

Другими словами,

$$A \to A + V_H + d\alpha, \tag{4.17}$$

где V_H – гармоническая форма:

$$\delta V = dV = 0, \qquad \delta = {}^*d^*. \tag{4.18}$$

Рассмотрим теперь член S', фиксирующий калибровку:

$$S' = \frac{1}{2}(\delta A,\ \delta A). \tag{4.19}$$

Хотя полное действие

$$S + S' = \frac{1}{2}(A,\ \Delta A), \quad \Delta = d\delta + \delta d, \tag{4.20}$$

уже не инвариантно относительно обычных "малых" калибровочных преобразований $A \to A + d\alpha$, оно по-прежнему инвариантно относительно "больших" калибровочных преобразований $A \to A + V_H$. Число гармонических p-форм V_H равно числу нулевых мод соответствующего лапласиана Δ_p, которое для компактного многообразия дается числом Бетти n_p. Числа Бетти связаны с эйлеровой характеристикой (3.61) соотношением

$$\chi = \sum_{p=0}^{4} (-1)^p n_p. \tag{4.21}$$

Именно эти нулевые моды, дающие вклад в функциональный интеграл, ответственны за квантовую неэквивалентность. Поскольку духи, духи для духов и т.п. дают вклады с противоположными знаками в аномалию следа, так же как и в (4.21), полный коэффициент при χ в аномалии будет отличаться от ожидаемого на основе "наивной эквивалентности" на целое число.

Но предположим, что мы выбрали калибровочный член, нарушающий инвариантность как относительно "малых", так и относительно "больших" преобразований. В этом случае нулевые моды будут отсутствовать и мы придем

к выводу о "квантовой эквивалентности". Это и есть наше объяснение результата Зигеля. Возникает вопрос: какое же из утверждений следует считать правильным? Ответ на этот вопрос зависит от выбора граничных условий.

Прекрасным пояснением может служить следующий простой пример (за обсуждение этого примера автор благодарен Гиббонсу, Айшему, Пескину и Виттену). Рассмотрим свободную теорию Максвелла при конечной температуре, т.е. на многообразии $M_3 \times S^1$, где M_3 – трехмерное пространство. В ковариантной калибровке типа (4.19) соответствующая статистическая сумма имеет вид

$$Z = \frac{\det \Delta_0}{(\det \Delta_1)^{1/2}}, \tag{4.22}$$

где Δ_1 – лапласиан на 1-формах (физическом потенциале A_μ) и Δ_0 – лапласиан на 0-формах (двух скалярных духах). Оператор Δ_1 имеет нулевую моду (окружность S^1, не являясь односвязной, характеризуется отличным от нуля первым числом Бетти), отвечающую полевой конфигурации:

$$A_0 = c = \text{const} = \Omega i \partial_0 \Omega^{-1}, \tag{4.23}$$

где

$$\Omega = \exp(ict). \tag{4.24}$$

Поле (4.23) есть "чистая калибровка", и в пространстве Минковского R^4 оно было бы тривиальным. Но при конечной температуре интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} A_\mu dx^\mu = n \tag{4.25}$$

2475

(n-целое, если $\Omega \subset U(1)$) не равен нулю. Предположим, однако, что мы выбрали калибровку

$$A_0 = 0. \tag{4.26}$$

Тогда мы автоматически исключили бы все нетривиальные конфигурации с $n \neq 0$. Тем самым, как может показаться с первого взгляда, мы пришли бы к разным статистическим суммам в разных калибровках. Добавление заряженной материи с помощью члена $A_\mu J^\mu$ привело бы к дельта- функции от полного заряда Q:

$$Q = \int d^3x\, J^0, \tag{4.27}$$

в калибровке, где имеется интегрирование по нулевой моде, но не в калибровке, где нулевая мода отсутствует. Мы снова приходим к вопросу: какой из от-

ветов правилен? Это зависит от свойств пространства M_3. Если, как обычно, M_3 выбрано плоским евклидовым пространством R^3, то потенциал (4.23) не является квадратично-интегрируемым и соответствующая мода выпадает из функционального интеграла. Если же пространство M_3 компактное, например S^3, то функция (4.23) будет квадратично-интегрируемой и должна быть учтена. Урок, который мы извлекаем, состоит в том, что результат, как таковой, не зависит от калибровки. Но он зависит от теории: при различном выборе физических граничных условий получаются различные ответы. Дело просто в том, что при заданных граничных условиях имеются допустимые и запрещенные калибровки. Например, (4.26) – запрещенная калибровка в компактном случае.

Так же обстоит дело с антисимметричными тензорами: в зависимости от физических предположений можно получить либо "квантовую неэквивалентность", либо "квантовую эквивалентность". Следует подчеркнуть, однако, что при заданной теории (т.е. лагранжиан *плюс* граничные условия) аномалия следа тензора энергии-импульса *однозначна* и *не зависит* от калибровки. Например, если пространство-время является компактным (как, скажем, в подходе пространственно-временно́й пены Хокинга [91]), то правильным является коэффициент A из табл. 5, тогда как коэффициент A' отвечает случаю асимптотически плоских многообразий. По-видимому, аналогичные замечания справедливы для полей со спинами 3/2 и 2: может случиться, что "чисто калибровочные" конфигурации

$$h_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu,$$
$$\Psi_\mu = D_\mu \varepsilon \tag{4.28}$$

тем не менее окажутся нетривиальными. Неучетом нулевых мод в случае, когда они имеют бесконечную норму, объясняется также, почему ΔA есть положительное число для коммутирующих полей и отрицательное – для антикоммутирующих. (Аналогичные "чисто калибровочные" моды рассматривались ранее в другом контексте в работе [92]; см. также [80].)

Понимание того, что результаты вычисления аномалий зависят от выбора граничных условий, позволяет внести ясность в некоторые вопросы, остававшиеся темными в литературе. Например, известно, что для максвелловского калибровочного поля A_μ число степеней свободы в двух измерениях равно нулю. Экстраполировав к $d = 2$ вычисления работы [13] (проделанные в рамках размерной регуляризации и в "плоской" калибровке), можно найти, что однопетлевой квантовый тензор энергии-импульса имеет нулевой след [45]. Метод же "ядра уравнения теплопроводности", использующий фоновую калибровку, приводит к результату

$$T^\mu_\mu = -\frac{1}{4\pi} R, \tag{4.29}$$

или $\int d^4x \sqrt{g} T^\mu_\mu = -\chi,$ (4.30)

где χ – эйлерова характеристика двумерного пространства. Этот пример есть не что иное, как двумерный аналог случая поля $\phi_{\mu\nu\rho}$ при $d = 4$. Вся дискуссия о квантовой неэквивалентности могла бы произойти еще несколько лет назад. Впрочем, она фактически и происходила. Коэффициент перед R в T^{μ}_{μ} при $d = 2$ совпадает с коэффициентом перед D^2R в T^{μ}_{μ} при $d = 4$. Значение последнего является предметом длительного (и до сих пор не оконченного) обсуждения (соответствующие ссылки приведены в работе [45]. Нужно иметь в виду, что граничные условия влияют на аномалии еще и в следующем смысле. В пространстве-времени с границей в аномалиях и контрчленах имеются граничные добавки. Как показано в работе [50], эти граничные члены в свою очередь сокращаются в суперсимметричных теориях, удовлетворяющих условию (4.19); см. также [71].

Итак, можно получить разные результаты для аномалий в супергравитации в зависимости: а) от выбора представлений физических полей, б) от выбора представлений вспомогательных полей и в) от выбора граничных условий. Например, из табл. 6 следует, что если выбрать подходящие граничные условия, то аномалии будут равны нулю при $N > 2$ даже в случае *обычного* выбора представлений (так что сокращение аномалий возможно и в варианте теории с $N = 8$, обладающей $E_7 \times SU(8)$-симметрией). Но что можно сказать о том выборе полей или граничных условий, при котором аномалии не обращаются в нуль при $N > 2$ и для которого они не образуют мультиплета? По-видимому, в этом случае нулевые моды фактически нарушают суперсимметрию (т.е. имеет место нарушение симметрии гравитационными инстантонами). Утверждение, что аномалии *должны* образовывать супермультиплет в случае суперполевого вычисления, теперь должно быть модифицировано: суперсимметричная фиксация калибровки, необходимая в суперполевом формализме, может оказаться несовместимой с граничными условиями или условиями периодичности. Близкие ситуации возникают и в других задачах. Например, при конечной температуре, когда бозоны периодичны по мнимому времени, а фермионы – антипериодичны, отсутствует глобальная суперсимметрия. Точно так же обращение в нуль плотности вакуумной энергии в суперсимметричной теории [158] не приводит к нулевому эффекту Казимира, так как введение проводящих пластин означает разные граничные условия для разных компонент супермультиплета.

Наконец, еще несколько слов о вспомогательных полях. Хотя мы уже обсуждали различные представления вспомогательных полей, все они отвечают так называемому "старому минимальному" набору [138, 63], или, другими словами, случаю $n = -1/3$ в обозначениях работы [79]. В работе [79] был проведен анализ аномалий в рамках "нового минимального" набора вспомогательных полей [133], отвечающего значению $n = 0$, а также "старого неминимального" набора Брейтенлонера, отвечающего случаю $n \neq 0, -1/3$ (в этом случае взаимодействие с материей описывается "новым ухудшенным тензором энергии-импульса" [57]). При этом выяснилось, что наличие конформных аномалий в общем случае приводит *к аномалиям в тождествах Уорда для локаль-*

ной суперсимметрии. Как следствие этого, по крайней мере в супергравитации с $N = 1$ непротиворечивая теория возможна лишь в рамках набора вспомогательных полей с $n = -1/3$.

Закончим этот параграф, посвященный аномалиям, следующим вопросом. Мы выяснили в однопетлевом приближении, что отсутствие киральных суперполей означает отсутствие конформных аномалий, а следовательно (ввиду суперсимметрии) и киральных аномалий. Это весьма удовлетворительный результат. Киральные аномалии связаны с дисбалансом между "левыми" и "правыми" полями, а такой дисбаланс невозможен в отсутствие киральных суперполей. Является ли отсутствие киральных аномалий чисто однопетлевым эффектом или же это закономерность, свойственная и точной теории?

§ 5. Последние достижения

За время, прошедшее после того, как была написана бо́льшая часть этих лекций, был получен ряд интересных результатов, углубивших наше понимание ультрафиолетовых расходимостей в расширенных супергравитациях. Наиболее важные из них кратко излагаются ниже.

Правила сумм

Хотя в правильности спиновых и массовых правил сумм, о которых шла речь в § 3, можно убедиться, рассмотрев известный спиновый и массовый состав мультиплетов расширенной суперсимметрии, желательно было бы вывести их из "первых принципов". Такой вывод был дан в работе [62] на основе фундаментальной алгебры расширенной суперсимметрии. Эта работа подтвердила предположение, что спиновые и массовые правила сумм – одинакового происхождения. Более того, оказалось, что правила сумм, на основе которых было продемонстрировано сокращение однопетлевых ультрафиолетовых расходимостей, являются лишь частными случаями более общих соотношений, что говорит о возможности новых, еще не обнаруженных сокращений расходимостей. (См. также работу [60].)

Супергравитация с $N = 8$ с локальной $SO(8) \times SU(8)$-симметрией

В § 3 уже говорилось, что обращение в нуль однопетлевой β-функции в калибровочных теориях супергравитации с $N > 4$ было открыто еще до того, как были построены полные лагранжианы этих моделей, а значит, и до того, как было установлено фактическое существование этих теорий. В настоящее время калибровочная супергравитация с $N = 8$ (а следовательно, и теории с $N < 8$) уже построена [40, 41]. Доказано также, что в добавление к локальной $SO(8)$-симметрии она обладает локальной нелинейно реализованной $SU(8)$-инвариантностью. Соответствующие полям представления этих групп таковы:

	$e_\mu{}^a$	$\psi_\mu{}^i$	$A_\mu{}^{IJ}$	χ^{ijk}	$U_{ij}{}^{IJ}$	V^{ijIJ}
$SO(8)$	1	1	28	1	28	28
$SU(8)$	1	8	1	56	$\overline{28}$	28

[Чтобы получить ожидаемые представления 1, 8, 28, 56, 70 группы $SO(8)$ необходимо выбрать специальную калибровку для $SU(8)$.] При выключении калибровочного взаимодействия мы возвращаемся к некалибровочной теории с $N = 8$ с глобальной E_7 и локальной $SU(8)$ инвариантностями [22].

Калибровочная версия теории с $N = 8$ приводит к новым возможностям для суперобъединения, отсутствовавшим в некалибровочной теории. Одна из таких возможностей, предложенная в работах [40, 41], основывается на гипотезе, что лишь синглеты группы $SO(8)$ со спинами 2, 3/2 и 1/2 не подвержены конфайнменту. При этом остается неясным, можно ли совместить это предположение с равенством нулю β-функции. Анализ возможных контрчленов в калибровочной теории с $N = 8$ был проведен в работе [95].

Конформная супергравитация: конечна при $N = 4$

Хотя теории с четвертыми производными были упомянуты в § 1, мы еще не рассматривали их суперсимметричных аналогов, в частности теорий конформной супергравитации с $N = 1, 2, 3$ и 4, являющихся суперсимметричными расширениями конформной гравитации с лагранжианом, равным квадрату тензора Вейля (см. обзор в работе [38]). Заранее нельзя было бы ожидать, что эти теории будут непротиворечивыми на квантовом уровне, так как существование конформных аномалий в одной петле привело бы к нарушающим конформную инвариантность добавкам к лагранжиану в двух и более петлях [12]. В то же время конформная инвариантность необходима для поддержания постоянным числа распространяющихся степеней свободы. Это возражение естественно не справедливо в случае, если теория является ультрафиолетово-конечной[1]. Фрадкин и Цейтлин [70, 72] вычислили однопетлевые контрчлены в теориях с $N = 1, 2, 3, 4$ и установили, что конформная супергравитация с $N = 4$ конечна в однопетлевом приближении. Таким образом, имеется еще один пример "чудесного" сокращения, которое нельзя было бы предсказать, анализируя допустимые инвариантные контрчлены.

[1] Вопрос о конформных аномалиях в таких теориях рассматривается в работе [169] – *Прим. перев.*

Гравитация с "топологической массой"

Говоря о теориях с высшими производными, отметим также работу [30], в которой была рассмотрена трехмерная теория гравитации с "топологическим" массовым членом, содержашим третьи производные. Этот член достаточен для обеспечения перенормируемости по индексу[1]. Удивительно, что, в отличие от большинства теорий с высшими производными он тем не менее не приводит к появлению духов. Без сомнения, существует суперсимметричный вариант этой теории. Но каковы приложения ее к четырехмерной супергравитации, если они и вообше имеют место, пока не известно.

Теоремы "неперенормировки": доказательства конечности во всех порядках

В § 3 мы уже подчеркивали, что не все сокращения расходимостей в расширенных теориях супергравитации можно объяснить отсутствием допустимых инвариантов, которые могли бы быть кандидатами на роль контрчленов. Сколь бы ни была ценной информация об инвариантах с высшими производными, ориентация лишь на анализ таких инвариантов фактически замедлила прогресс в супергравитации на несколько лет! Еще на заре глобально суперсимметричных теорий было известно, что их ультрафиолетовое поведение даже при $N = 1$ оказывается лучшим, чем можно было бы ожидать на основе наивного подсчета индекса расходимости. Например, в модели Весса – Зумино отсутствует квадратичная перенормировка массы для скалярных партнеров киральных фермионов [154, 98]. Аналогичные теоремы неперенормировки имеют место в абелевых [155] и неабелевых [61] калибровочных теориях. Именно эти свойства неперенормируемости вызвали в последнее время интерес к суперсимметричным теориям великого объединения (см., например, [60]).

Упомянутые теоремы являются специальными случаями более общего результата, доказанного в работе [85] на основе ($N = 1$)-суперпространственных правил Фейнмана: все квантовые поправки к эффективному действию могут быть записаны в виде одного интеграла $\int d^4\theta$ по всему ($N = 1$)-суперпространству. Это означает, что члены в древесном лагранжиане, которые записываются по-иному (например, массовые члены и члены самодействия $\int d^2\theta\, \varphi^n$ для киральных суперполей в модели Весса – Зумино), не будут перенормировываться!

Однако далеко идущие следствия этого результата лишь недавно были по-настоящему оценены. В работе [136] было замечено, что если построить суперсимметричную теорию Янга – Миллса с $N = 4$, пользуясь ($N = 1$)-суперполями, то в действии будет член кирального взаимодействия, который, имея

---

[1] Как отмечено в исправленном варианте препринта [30], опубликованном в работе [170], топологический член, обладая большей (конформной) симметрией, чем эйнштейновское действие, *не обеспечивает* подавления всех неперенормируемых расходимостей. — *Прим. перев.*

вид $\int d^2\theta$, не перенормируется. На основании суперсимметрии с $N = 4$ можно доказать, что в таком случае не перенормируется и все действие, а значит, β-функция теории остается равной нулю во всех порядках теории возмущений! Аналогичная ($N = 1$)-полевая теорема о неперенормируемости может быть, по-видимому, использована для доказательства равенства нулю β-функции в калибровочных теориях супергравитации с $N > 4$ во всех порядках [137].

Теории струн

Исторически теории суперсимметрии тесно связаны с теорией дуальных струн. Недавно в теории струн были получены два интересных различных по характеру результата. Первый из них, принадлежащий Полякову [114, 115], устанавливает связь критической размерности $d = 26$ для бозонной струны и $d = 10$ для фермионной струны с аномалиями тензора энергии – импульса (§ 4) соответственно в двумерной теории гравитации и супергравитации. Топологические и граничные добавки к аномалиям, о которых говорилось в § 4, по-видимому, тоже существенны в случае, если учитываются дырки и границы двумерной мировой поверхности, заметаемой струной. С учетом этих аномалий теория описывается лагранжианом двумерной теории Лиувилля с константой взаимодействия (имеющей размерность массы), связанной с космологической постоянной, которую Поляков вводит для обеспечения перенормируемости. По мнению автора этих строк, в случае фермионной струны нет необходимости во введении лиувиллевского взаимодействия. В самом деле, в этом случае квантовые поправки не индуцируют космологического члена и мы имеем тривиальный пример теоремы о неперенормируемости, о которой говорилось выше. Отсутствие индуцированного космологического члена было подтверждено явными вычислениями Фрадкина и Цейтлина [73].

Второй интересный результат, принадлежащий Грину, Шварцу и Бринку [81], – построение суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 1$ при $d = 10$ и супергравитации с $N = 2$ при $d = 10$ как пределов нулевого "наклона" для фермионных моделей струны. Предполагая, что "лишние" измерения компактны, а именно являются окружностями, и устремляя радиусы окружностей к нулю, авторы проанализировали ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости в этих теориях при разных значениях d. Они установили, что в однопетлевом приближении как супер-янг-миллсовская теория, так и теория супергравитации ультрафиолетово-конечны при $d < 8$ и инфракрасно-конечны при $d > 4$ (причем в случае супергравитации инфракрасная расходимость оказывается более слабой). При дополнительном предположении, что некоторые кинематические свойства амплитуды сохраняются и в старших петлях, сделан вывод, что при $d = 4$ супер-янг-миллсовская теория с $N = 4$ ультрафиолетово-конечна во всех порядках, тогда как супергравитация с $N = 8$ имеет расходимости, начиная с трех петель. Интересно, что полученные в [81] результаты для двух-, трех- и четырехчастичных функций Грина и ультрафиолетового поведения этих теорий при разных значениях N в точности параллельны выводам, сделанным в

§ 3 на основе правил сумм и грубого предположения о том, что каждой вершине в случае теории Янга – Миллса отвечает первая степень спина, а в случае гравитации – вторая.

Авторы работы [81] подчеркивают, что исходные теории струн могут быть ультрафиолетово-конечными, даже если их пределы нулевого "наклона" таковыми не являются.

Еще о суперграфах

Грисару и Зигель [88] продолжили изучение своих правил Фейнмана для суперполей с $N = 1$. В качестве одного из приложений они рассмотрели вычисление однопетлевой четырехчастичной S-матрицы в расширенной супергравитации. Оказалось, что вычисления наиболее сложны в супергравитации с $N = 1$, но упрощаются с ростом N так, что при $N = 8$ результат получается почти тривиально (и согласуется с результатами упомянутых выше вычислений на основе струнной модели). Упрощение объясняется отсутствием киральных суперполей при $N \geqslant 3$ (§ 4), а также обращением в нуль различных членов в амплитудах при увеличении N (по-видимому, обусловленным правилами сумм из § 3).

В своих лекциях мы не рассматривали теорию "калибровочной суперсимметрии" Ната и Арновитта, так как соответствующий ей спектр частиц трудно установить и он, так или иначе, содержит нефизические духовые состояния. Однако названные авторы были среди первых, кто применил мощный метод суперпространственного подсчета индекса расходимости. Действительно, можно показать, что их теория, хотя и нефизическая, тем не менее является конечной во всех порядках (см., например, работу [3]). Дальнейший анализ ультрафиолетовых расходимостей и суперполей можно найти в работе [139].

В одной из более поздних работ, посвященных суперпространственным правилам подсчета индекса расходимости, Грисару и Зигель [89], предполагая существование формализма расширенных суперполей, доказали: а) что супер-янг-миллсовская теория с $N = 4$ конечна во всех порядках; б) что супер-янг-миллсовская теория с $N = 2$ имеет отличную от нуля β-функцию лишь в однопетлевом приближении; в) что супергравитация с $N = 8$ конечна в шестипетлевом приближении (последнее означает, что предложенный ранее трехпетлевой контрчлен фактически отсутствует).

Определенное разочарование может вызвать то, что в настоящий момент не удается исключить *все* контрчлены в супергравитации с $N = 8$. Но опыт показывает, что не следует недооценивать возможности суперсимметрии!

Теории Калуцы – Клейна

Одна из остающихся возможностей была отмечена во введении: может быть, конечной является супергравитация с $N = 1$ в 11 измерениях [56]. Результаты Грина, Шварца и Бринка [81] не включают эту возможность. Названные авторы рассмотрели теорию, которая соответствует супергравитации с $N = 2$ при $d = 10$ и получается из супергравитации с $N = 1$ при $d = 11$ лишь после отбрасы-

вания бесконечного набора массивных состояний. Анализ спектра массивных состояний в теориях Калуцы – Клейна недавно был проведен в работе [125], где было показано, что массивные моды принадлежат бесконечномерным представлениям некомпактных групп.

Хотя Креммер и Джулиа [22] знали о возможности выбора лишних измерений, отличных от *семимерного тора* $S^1 \times \ldots \times S^1$, они провели явные вычисления лишь в этом частном случае. В результате они получили супергравитацию с $N = 8$ при $d = 4$, имеющую глобальную $SO(7)$-симметрию. (Ей соответствует вариант с антисимметричными тензорами, который рассматривался в § 4.) Лишь после преобразований дуальности (переводящих антисимметричные тензоры в скаляры) им удалось получить вариант теории с глобальной E_7 и локальной $SU(8)$ инвариантностями. В результате геометрическая природа этих симметрий оставалась неясной.

Как показано в нашей работе [55], *калибровочный* вариант теории с $N = 8$ можно получить из супергравитации с $N = 1$ и $d = 11$, выбрав лишние измерения в виде *7-сферы* (S^7). Последнее гарантирует, что четырехмерный лагранжиан, описывающий безмассовые состояния, будет иметь локальную $SO(8)$-симметрию и (отрицательную) космологическую постоянную. Вследствие этого полученная теория почти наверняка будет совпадать с теорией Де Вита и Николаи [41], рассмотренной выше. Данный вывод подтверждается подсчетом числа безмассовых состояний: мы находим 1 гравитон, 8 гравитино, 28 векторов и 56 фермионов со спином 1/2. Прямой подсчет безмассовых скаляров более сложен, но косвенным образом можно показать, что их число должно быть равно 70. Это следует из суперсимметрии с $N = 8$, которая в свою очередь гарантируется наличием восьми безмассовых частиц со спином 3/2. С уверенностью можно утверждать, что эти частицы со спином 0 будут именно скалярами, а не антисимметричными тензорами (это следует из различия чисел Бетти для 7-сферы и 7-тора). Поэтому для получения симметрий лагранжиана Де Вита и Николаи нет необходимости в проведении дуальных преобразований. Следовательно, в результате представляется вероятным, что скрытая локальная $SU(8)$-симметрия калибровочной версии и глобальная E_7-симметрия, имеющая место при выключении калибровочного взаимодействия (т.е. при устремлении радиуса сферы к нулю), могут иметь более прозрачную геометрическую интерпретацию в рамках подхода, использующего 7-сферу вместо 7-тора.

Подход типа Калуцы – Клейна позволяет увидеть в правильной перспективе различие между двумя теориями с $N = 8$, о которых говорилось в § 4. В действительности может существовать бесконечное число четырехмерных теорий, соответствующее бесконечному числу способов компактификации лишних семи измерений. Но при этом суперсимметрия с $N = 8$ (8 безмассовых гравитино) будет исключением, а не правилом. Вопрос о стабильности основного состояния остается открытым, но большое число разных теорий можно интерпретировать как множество разных фаз одной и той же теории. Некоторые из них будут обладать симметрией $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ в соответствии с

предложением Виттена [157]. Главным по-прежнему остается вопрос о числе безмассовых фермионов. Правила подсчета безмассовых состояний в теориях супергравитации в рамках подхода Калуцы – Клейна приведечы в работе [55].

Можно ли объяснить равенство нулю β-функций из § 3 и аномалий из § 4, рассматривая теории в высших измерениях ?[1] Какова связь между рассмотренными выше теоремами о неперенормировке, спиновыми и массовыми правилами сумм из § 3 и отсутствием киральных суперполей, игразшим важную роль в § 4 ? Можно ли найти формулировки вне массовой оболочки для расширенной супергравитации при $d = 4$ или для теории с $N = 1$ при $d = 11$? Если можно, то как существование таких формулировок скажется на свойствах перенормируемости?

Заключение

В вопросе об ультрафиолетовых расходимостях в теориях расширенной супергравитации мы еще далеки от полного понимания.

Литература

1. *Adler S.L.* Einstein gravity as a symmetry breaking effect in quantum field theory. Rev. Mod. Phys., **54**, 729 (1982).
2. *Alvarez-Gaumé L., Freedman D.Z.* (1980). Geometrical structure and ultraviolet finiteness in the supersymmetric σ-model. Commun. Math. Phys., **80**, 443 (1981).
3. *Arnowitt R., Nath P.* Supergraphs and ultraviolet finiteness in gauge supersymmetry. In: Supergravity, eds. D.Z. Freedman, P. van Nieuwenhuizen, Amsterdam: North Holland (1979).
4. *Aurelia A., Nicolai H.,* Townsend P.K. Hidden constants: The θ parameter of QCD and the cosmological constant of N = 8 supergravity. Nucl. Phys., **B 176**, 509 (1980).
5. *Avdeev L.V., Chochia G.A., Vladimirov A.A.* On the scope of supersymmetric dimensional regularization. Phys. Lett., **105B**, 272 (1981).
6. *Avdeev L.V., Tarasov O.V., Vladimirov A.A.* Vanishing of the three-loop charge renormalization function in a supersymmetric gauge theory. Phys. Lett., **96B**, 94 (1980).
7. *Barvinsky A.O., Vilkovisky G.A.* Divergences and anomalies for coupled gravitational and Majorana spin-1/2 fields. Nucl. Phys., **B 191**, 237 (1981).

---

[1] Ответ на вопрос об аномалиях был дан в работе [163], где было показано, что сокращение аномалий в варианте супергравитации с $N = 8$ с антисимметричными тензорами эсть следствие некоторого свойства (равенства нулю четвертого коэффициента Сили) супергравитации в 11 измерениях. – *Прим. перев.*

8. *Berends F.A., Gastmans R.* Quantum gravity and the electron and muon magnetic moments. Phys. Lett., **55B**, 311 (1975).
9. *Breitenlohner P.* A geometric interpretation of local supersymmetry. Nucl. Phys., **B182**, 125 (1977).
10. *Capper D.M., Duff M.J.* One loop neutrino contribution to the graviton propagator. Nucl. Phys., **B82**, 147 (1974).
11. *Capper D.M., Duff M.J.* Trace anomalies in dimensional regularization. Nuovo Cimento, **23A**, 173 (1974).
12. *Capper D.M., Duff M.J.* Conformal anomalies and the renormalizability problem in quantum gravity. Phys. Lett., **53A**, 361 (1975).
13. *Capper D.M., Duff M.J., Halpern L.* Photon corrections to the graviton propagator. Phys. Rev., **D10**, 461 (1974).
14. *Caswell W.E., Zanon D.* Zero three-loop beta function in the N = 4 supersymmetric Yang – Mills theory. Nucl. Phys., **B182**, 125 (1981).
15. *Christensen S.M.* Quantizing fourth order gravity theories. In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham. Cambridge: Cambridge University Press (1981).
16. *Christensen S.M., Deser S., Duff M.J., Grisaru M.T.* Chirality, self-duality, and supergravity counterterms. Phys. Lett., **84B**, 411 (1979).
17. *Christensen S.M., Duff M.J.* Axial and conformal anomalies for arbitrary spin in quantum gravity and supergravity. Phys. Lett., **76B**, 571 (1978).
18. *Christensen S.M., Duff M.J.* Quantum gravity in $2 + \varepsilon$ dimensions. Phys. Lett., **79B**, 213 (1978).
19. *Christensen S.M., Duff M.J.* New gravitational index theorems and supertheorems. Nucl. Phys., **B154**, 301 (1979).
20. *Christensen S.M., Duff M.J.* Quantizing gravity with a cosmological constant. Nucl. Phys., **B170**, 480 (1980).
21. *Christensen S.M., Duff M.J., Gibbons G.W., Roček M.* Vanishing one-loop β function in gauged $N \geqslant 4$ supergravity. Phys. Rev. Lett., **45**, 161 (1980).
22. *Cremmer E., Julia B.* The SO(8) supergravity. Nucl. Phys. **B159**, 141 (1979).
23. *Cremmer E., Scherk J., Schwarz J.* Spontaneously broken $N = 8$ supergravity. Phys. Lett., **84B**, 83 (1979).
24. *Curtright T.* Charge renormalization and high spin fields. Phys. Lett., **102B**, 17 (1981).
25. *Das A., Fischler M., Roček M.*, Super-Higgs effect in a new class of scalar models and a model of super QED. Phys. Rev., **D16**, 3427 (1977).
26. *Derendinger J.P., Ferrara S., Savoy C.A.* Flavour and superunification. Nucl. Phys., **B188**, 77 (1981).
27. *Deser S.* Trees, loops and renormalizability. In: Quantum Gravity: An Oxford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama. Cambridge: Cambridge University Press (1975).

28. *Deser S.* Divergence cancellations in gravity-matter systems from supergravity embedding. Phys. Lett., **101B**, 311 (1981).

29. *Deser S., Duff M.J., Isham C.J.* Non-local conformal anomalies. Nucl. Phys., **B 114**, 29 (1976).

30. *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Topologically massive gauge theories. MIT preprint CTP 964 (1981).

31. *Deser S., Kay J.H.* Three-loop counterterms for extended supergravity. Phys. Lett., **76B**, 400 (1978).

32. *Deser S., Kay J.H., Stelle K.S.* Renormalizability properties of supergravity. Phys. Rev. Lett., **38**, 527 (1977).

33. *Deser S., Tsao H.-S., van Nieuwenhuizen P.* One-loop divergences of the Einstein–Yang–Mills system. Phys. Rev., **D10**, 3337 (1974).

34. *Deser S., van Nieuwenhuizen P.* Non-renormalizability of the quantized Einstein – Maxwell system. Phys. Rev. Lett., **32**, 245 (1974).

35. *Deser S., van Nieuwenhuizen P.* One-loop divergences of quantized Einstein – Maxwell fields. Phys. Rev., D **10**, 401 (1974).

36. *Deser S., Zumino B.* Consistent supergravity. Phys. Lett., **62B**, 335 (1976).

37. *Deser S., Zumino B.* Broken supersymmetry and supergravity. Phys. Rev. Lett., **38**, 1433 (1977).

38. *De Wit B.* Conformal invariance in gravity and supergravity. NIKHEF preprint H/81–20 (1981).

39. *De Wit B., Grisaru M.T.* On-shell counterterms and non-linear invariances. Phys. Rev., D **8**, 2082 (1979).

40. *De Wit B., Nicolai H.* Extended supergravity with local SO(5) invariance, Nucl. Phys., **B 188**, 98 (1981).

41. *De Wit B., Nicolai H.* N = 8 supergravity with local SO(8) × SU(8) invariance, Nucl. Phys., **B 208**, 323 (1982).

42. *De Wit B.* Dynamical theory of groups and fields. New York: Gordon and Breach (1965).

43. *Dowker J.* Another discussion of the axial vector anomaly and the index theorem. J. Phys., **A11**, 347 (1978).

44. *Duff M.J.* Covariant quantization of gravity. In: Quantum Gravity: An Cuford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama, Oxford: Oxford University Press (1975).

45. *Duff M.J.* Observations on conformal anomalies. Nucl. Phys., **B 125**, 334 (1977).

46. *Duff M.J.* Self-duality, helicity, and supergravity. In: Supergravity, eds. P. van Nieuwenhuizen, D.Z. Freedman, Amsterdam: North Holland (1979).

47. *Duff M.J.* Quantization of supergravity with a cosmological constant. In:

Unification of the Fundamental Interactions, eds. J. Ellis, S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, New York and London: Plenum (1980).

48. *Duff M.J.* Inconsistency of quantum field theory in curved spacetime. In: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama, Oxford: Oxford University Press (1981).

49. *Duff M.J.* The cosmological constant in quantum gravity and supergravity, in Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama, Oxford: Oxford University Press (1981).

50. *Duff M.J.*, Antisymmetric tensors and supergravity. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking M. Roček, Cambridge, Cambridge University Press (1981).

51. *Duff M.J.*, *Goldthorpe A.*. Inconsistency of semiclassical gravity: the 1/N expansion. To be published (1981).

52. *Duff M.J.*, *Grisaru M.T.*, *Siegel W.* Superanomalies. To be published (1981).

53. *Duff M.J.*, *Isham C.J.* Self-duality, helicity and supersymmetry: the scattering of light by light. Phys. Lett., **86B**, 157 (1979).

54. *Duff M.J.*, *Isham C.J.* Self-duality, helicity and coherent states in non-Abelian gauge theories. Nucl. Phys., **B 162**, 271 (1980).

55. *Duff M.J.*, *Pope C.N.* Kaluza – Klein supergravity and the seven sphere. In: Supersymmetry and Supergravity, 82, Proc. Trieste 1982 School (World Scientific, 1983).

56. *Duff M.J.*, *Toms D.* Ultraviolet divergences in Kaluza – Klein theories. In: Unification of fundamental interactions II (Plenum, 1982)

57. *Duff M.J.*, *Townsend P.K.* A new deteriorated energy momentum tensor. In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

58. *Duff M.J.*, *van Nieuwenhuizen P.* Quantum inequivalence of different field representations. Phys. Lett., **94B**, 179 (1980).

59. *Ellis J.*, *Gaillard M.K.*, *Maiani L.*, *Zumino B.* Attempts at superunification. In: Unification of the Fundamental Interactions, eds. J. Ellis, S. Ferrara, van Nieuwenhuizen, New York and London: Plenum (1980).

60. *Ferrara S.* Ultraviolet properties of supersymmetric gauge theories In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

61. *Ferrara S.*, *Piguet O.* Perturbation theory and renormalization of supersymmetric Yang-Mills theories. Nucl. Phys., **B93**, 261 (1975).

62. *Ferrara S.*, *Savoy C.A.* *Girardello L.* Spin sum rules in extended supergravity. Phys. Lett., **105B**, 363 (1981).

63. *Ferrara S.*, *P. van Nieuwenhuizen P.* The auxiliary fields for supergravity. Phys. Lett., **74B**, 333 (1978).

64. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.* Structure of supergravity. Phys. Lett., **78B**, 573 (1978).
65. *Ferrara S., Zumino B.* Transformation properties of the supercurrent. Nucl. Phys., **B 87**, 207 (1975).
66. *Ferrara S., Zumino B.* Structure of linearized supergravity and conformal supergravity. Nucl. Phys., **B 134**, 301 (1978).
67. *Ferrara S., Zumino B.* Unpublished (1978).
68. *Ferrara S., Zumino B.* The mass matrix of $N = 8$ supergravities. Phys. Lett., **86B**, 279 (1979).
69. *Fischler M.* Finiteness calculations for 0(4) through 0(8) extended supergravity and 0 (4) supergravity coupled to selfdual 0(4) matter. Phys. Rev., D **20**, 396 (1979).
70. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity. Phys. Lett., **104B**, 377 (1981).
71. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Higher derivative quantum gravity: One-loop counterterms and asymptotic freedom. Nucl. Phys., **B 201**, 469 (1982).
72. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Asymptotic freedom in extended conformal supergravities. Nucl. Phys., **B 203**, 157 (1982).
73. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantization of two-dimensional supergravity and critical dimensions for string models. Phys. Lett., **106B**, 63 (1981).
74. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.* SO(2) supergravity with minimal electromagnetic interaction. Lebedev preprint N197 (1976).
75. *Freedman D.Z., Das A.* Gauge internal symmetry in extended supergravity. Phys. Lett., **74B**, 333 (1977).
76. *Freedman D.Z., Schwarz J.* N = 4 supergravity with local SU(2) × SU(2) invariance. Nucl. Phys., **B 137**, 333 (1978).
77. *Freedman D.Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.* Progress toward a theory of supergravity. Phys. Rev., D **13**, 3214 (1976).
78. *Freund P.G.O., Rubin M.A.* Dynamics of dimensional reduction. Phys. Lett., **97B**, 233 (1980).
79. *Gates G.J., Jr., Grisaru M.T., Siegel W.* Auxiliary field anomalies. Nucl. Phys., **B 203**, 189 (1982).
80. *Gibbons G.W.* The multiplet structure of solitons in the O(2) supergravity theory. In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham, Cambridge: Cambridge University Press (1981).
81. *Green M.B., Schwarz J.H., Brink L.* N = 4 Yang-Mills and N = 8 supergravity as limits of string theories. Nucl. Phys., **B 198**, 474 (1982).
82. *Grisaru M.* Two-loop renormalizability of supergravity. Phys. Lett., **66B**, 75 (1977).
83. *Grisaru M.T.* Anomalies in supersymmetric theories. In: Recent Developments in Gravitation, eds. S. Deser, M. Levy, New York and London: Plenum (1978).

84. *Grisaru M., Pendleton H.* Some properties of scattering amplitudes in supersymmetric theories. Nucl. Phys., **B 124**, 81 (1977).

85. *Grisaru M.T., Roček M., Siegel W.* Improved methods for supergraphs. Nucl. Phys., **B 159**, 429 (1979).

86. *Grisaru M. T., Roček M., Siegel W.* Zero 3-loop β-function in N = 4 super Yang-Mills theory. Phys. Rev. Lett., **45**, 1063 (1980).

87. *Grisaru M.T., Siegel W.* Supergraphity. Nucl. Phys., **B 187**, 149 (1981).

88. *Grisaru M.T., Siegel W.* The one-loop, four particle S-matrix in extended supergravity. Phys. Lett., **110b**, 49 (1982).

89. *Grisaru M.T., Siegel W.* Supergraphity (II). Manifestly covariant rules and higher-loop finiteness. Nucl. Phys., **B201**, 474 (1982).

90. *Grisaru M.T., van Nieuwenhuizen P., Vermaseren J.A.M.* One-loop renormalizability of pure supergravity and of Maxwell-Einstein theory in extended supergravity. Phys. Rev. Lett., **37**, 1662 (1976).

91. *Hawking S.W.* Spacetime foam. Nucl. Phys. **B 144**, 349 (1978).

92. *Hawking S.W., Pope C.N.* Symmetry breaking by instantons in supergravity. Nucl. Phys., **B 146**, 381 (1978).

93. *Hawking S.W., Pope C. N.* Generalized spin structures in quantum gravity. Phys. Lett., **73B**, 42 (1978).

94. *Howe P., Lindström U.* Counterterms for extended supergravity. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

95. *Howe P., Nicolai H.* Gauging N = 8 supergravity in superspace. Phys. Lett., **109B**, 269 (1982).

96. *Howe P., Townsend P., Stelle K.S.* Superactions. Nucl. Phys., **B 191**, 445 (1981).

97. *Hughes R.J.* Some comments on asymptotic freedom. Phys. Lett., **97B**, 246 (1980).

98. *Illiopoulos J., Zumino B.* Broken supergauge symmetry and renormalization. Nucl. Phys., **B 76**, 310 (1974).

99. *Isham C.J., Salam A., Strathdee J.* Infinity suppression in gravity-modified electrodynamics. Phys. Rev., D **3**, 1805 (1972).

100. *Jones D.R.T.* Private communication (1981).

101. *Julve J., Tonin M.* Quantum gravity with higher derivative terms. Nuovo Cimento, **46B**, 137 (1978).

102. *Каллош P.* Суперсамодуальность. Письма в ЖЭТФ, **29**, 192 (1979).

103. *Каллош P.* Структура расходимостей в супергравитации. Письма в ЖЭТФ, **29**, 493 (1979).

104. *Kallosh R.* Self duality in superspace. Nucl. Phys., **B 165**, 119 (1980).

105. *Kallosh R.E.* Counterterms in extended supergravities. Phys. Lett., **99B**, 122 (1981).

106. *Kemmer N.* Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction. Proc. Roy. Soc., **CLXVI**, No. A924, 127 (1938).
107. *Kibble T.W.B.* Is semi-classical gravity theory viable? In: Quantum Gravity II: A Second Oxford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama, Oxford: Oxford University Press (1981).
108. *MacDowell S., Mansouri F.* Unified geometric theory of gravity and supergravity. Phys. Rev. Lett., **38**, 739, 1376 (E) (1977).
109. *Nicolai H., Townsend P.K.* N = 3 supersymmetry multiplets with vanishing trace anomaly: building blocks of the N > 3 supergravities. Phys. Lett., **98 B**, 257 (1981).
110. *Nielsen N.K., Römer H., Schroer B.* Anomalous currents in curved space. Nucl. Phys., **B136**, 475 (1978).
111. *Nouri-Moghadam, Taylor J.G.* One loop divergences for the Einstein-charged meson system. Proc. Roy. Soc., **A344**, 87 (1975).
112. *Огиевецкий В.И., Полубаринов И.В.* Нотоф и его возможные взаимодействия. ЯФ, **4**, 210 (1968).
113. *Ogievetsky V., Sokatchev E.* Equation for motion for the axial gravitational superfield. Dubna preprint E2-80-139 (1980).
114. *Polyakov A.M.* Quantum geometry of bosonic strings. Phys. Lett., **103B**, 207 (1981).
115. *Polyakov A.M.* Quantum geometry of fermionic strings. Phys. Lett., **103B**, 211 (1981).
116. *Pope C.N.* Eigenfunctions and spin structures in CP^2. Phys. Lett., **97B**, 417 (1980).
117. *Römer H.* Axial anomaly and boundary terms for general spinor fields. Phys. Lett., **B83**, 172 (1979).
118. *Römer H.* A universality property of axial anomalies. Phys. Lett., **101B**, 55 (1981).
119. *Сахаров А.Д.* Вакуумные флуктуации в искривленном пространстве и теория гравитации. ДАН СССР, **177**, 70 (1967).
120. *Salam Abdus.* The impact of quantum gravity theory on particle physics. In: Quantum Gravity: Oxford Symposium, eds. C.J. Isham, R. Penrose, D.W. Sciama, Oxford: Oxford University Press (1975).
121. *Salam A., Strathdee J.* Supergauge transformations. Nucl. Phys., **B79**, 477 (1974).
122. *Salam A., Strathdee J.* Transition electromagnetic fields in particle physics. Nucl. Phys., **B90**, 203 (1975).
123. *Salam A., Strathdee J.* Remarks on high-energy stability and renormalizability of gravity theory. Phys. Rev., D **18**, 4480 (1978).
124. *Salam A., Strathdee J.* Supersymmetry and superfields. Fortschr. Phys., **26**, 57 (1978).

125. *Salam A., Strathdee J.* On Kaluza – Klein theories. Ann. Phys. (USA), **141**, 316 (1982).

126. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* New ghost-free gravity Lagrangians with propagating torsion. Phys. Rev., D **21**, 3269 (1980).

127. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* Renormalizability properties of antisymmetric tensor fields coupled to gravity. Phys. Rev., D **22**, 301 (1980).

128. *Siegel W.* Gauge spinor superfield as scalar multiplet. Phys. Lett., **85B**, 333 (1979).

129. *Siegel W.* Quantum equivalence of different field representations. Phys. Lett., **B 103**, 107 (1981).

130. *Siegel W., Townsend P.K. van Nieuwenhuizen P.* Supersymmetric dimensional regularization. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking, M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

131. *Slavnov A.A.* Symmetry preserving regularization for gauge and supergauge theories. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking, M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

132. *Sohnius M.F., West P.C.* Conformal invariance in N = 4 supersymmetric Yang-Mills-theory. Phys. Lett., **100B**, 245 (1981).

133. *Sohnius M.F., West P.C.* An alternative minimal off-shell version of N = 1 supergravity. Phys. Lett., **105B**, 353 (1981).

134. *Stelle K.S.* Renormalization of higher derivative quantum gravity. Phys. Rev., D **16**, 953 (1977).

135. *Stelle K.S.* Manifest internal symmetry and supersymmetry. CERN preprint TH-3127 and in: Proc. 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland (1981).

136. *Stelle K.S.* Extended supercurrents and the ultraviolet finiteness of N = 4 supersymmetric Yang-Mills theory. In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

137. *Stelle K.S., Townsend P.K.* Vanishing beta-functions in extended supergravities. Phys. Lett., **113B**, 25 (1982).

138. *Stelle K.S., West P.C.* Minimal set of auxiliary fields for supergravity. Phys. Lett., **74B**, 330 (1978).

139. *Taylor J.G.* The ultraviolet divergences of superfield supergravity. In: Proc. EPS Int. Conf. on High-Energy Physics. Geneva, Vol. 2, p. 969, Geneva: CERN (1979).

140. *Taylor J.G.* A no-go theorem for off-shell extended supergravities. Phys. Lett., **104B**, 131 (1981).

141. *Taylor J.G.* Auxiliary field candidates for N = 3, 4, 5, and 6 supergravities. J. Phys. A, **15**, 867 (1982).

142. *Taylor J.G.* Building linearised extended supergravities. In: Quantum Structure of Space and Time, eds. M.J. Duff, C.J. Isham, Cambridge: Cambridge University Press (1981).

143. *'t Hooft G., Veltman M.* One loop divergences in the theory or gravitation. Ann. Inst. Henri Poincaré, **20**, 69 (1974).
144. *Tomboulis E.* Renormalizability and asymptotic freedom in quantum gravity. Phys. Lett., **97B**, 77 (1980).
145. *Townsend P.K.* Cosmological constant in supergravity. Phys. Rev., D **15**, 2802 (1977).
146. *Townsend P.K.* Finite field theory? CERN preprint 3066 and in: Proc. 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland (1981).
147. *Townsend P.K.* Classical properties of antisymmetric tensor gauge fields. CERN preprint TH-3067 and in: Proc. 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland (1981).
148. *van Nieuwenhuizen P.* Proceedings of the Summer Institute on Recent Developments in Gravitation, Cargese France, 1978, eds. M. Levy, S. Deser, New York and London, Plenum (1979).
149. *van Nieuwenhuizen P.* Supergravity. Phys. Rep., **68**, 189 (1981).
150. *van Nieuwenhuizen P., Sezgin E.* Renormalizability properties of spontaneously broken N = 8 supergravity. Nucl. Phys., **B195**, 325 (1982).
151. *van Nieuwenhuizen P., Vermaseren J.A.M.* One-loop divergences in quantum theory of supergravity. Phys. Lett., **65B**, 263 (1976).
152. *van Proeyen A.* Gravitational divergences of the electromagnetic interactions of massive vector particles. Nucl. Phys., **B174**, 189 (1980).
153. *Weinberg S.* Ultraviolet divergences in quantum gravity. In: General Relativity: an Einstein Centenary Survey, eds. S.W. Hawking, W. Israel, Cambridge: Cambridge University Press (1979).
154. *Wess J., Zumino B.* A Lagrangian model invariant under supergauge transformations. Phys. Lett., **49B**, 52 (1974).
155. *Wess J., Zumino B.* Supergauge invariant extension of quantum electrodynamics. Nucl. Phys. 1 (1974).
156. *Wess J., Zumino B.* Superspace formalism of supergravity. Phys. Lett., **66B**, 361 (1977).
157. *Witten E.* Search for a realistic Kaluza-Klein theory. Nucl. Phys., **B186**, 412 (1981).
158. *Zumino B.* Supersymmetry and the vacuum. Nucl. Phys., **B89**, 535 (1975).
159* *Kallosh R.* Counterterms in extended supergravities. In: Supergravity '81, Proc. 1st School on Supergravity, Cambridge U.P., 1982, p. 397.
160* *Mandelstam S.* Light cone superspace and ultraviolet finitiness of N = 4 model. Nucl. Phys., **B213**, 149 (1983).
161* *Brink L., Lindgren O., Nilsson B.E.W.* The ultraviolet finiteness of N = 4 Yang-Mills theory. Phys. Lett., **123B**, 323 (1983).
162* *Howe P.S., Stelle K.S., Townsend P.K.* Miraculous ultraviolet cancellations in supersymmetry made manifest. Nucl. Phys., **B236**, 125 (1984).
163* *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantum properties of higher dimensional

and dimensionally reduced supersymmetric theories. Nucl. Phys., **B227**, 252 (1983).

164.* *Tseytlin A.A.* Poincare and De Sitter gauge theories of gravity. Phys. Rev., **D26**, 3327 (1982).

165.* *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Off-shell one loop divergences in gauged SO(N) supergravities. Phys. Lett., **117 B**, 303 (1982).

166.* *Breitenlohner P., Freedman D.Z.* Stability in gauged extended supergravity. Ann. Phys. (USA), **144**, 249 (1982).

167.* *Gibbons G.W., Hull C., Warner N.P.* The stability of gauged supergravity. Nucl. Phys., **B218**, 173 (1983).

168.* *Каллош Р.Э.* Аксиальная и конформная аномалии в супергравитации. Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 37, с. 509.

169.* *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Conformal anomaly in Weyl theory and anomaly free superconformal theories. Phys. Lett., **134B**, 187 (1984).

170.* *Deser S., Jackiw R., Templeton S.* Topologically massive gauge theories. Ann. Phys. (USA), **140**, 372 (1982).

КОНФОРМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В РАСШИРЕННОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Б. де Вит[1]

§ 1. Введение

Группа конформных преобразований оставляет инвариантным световой конус. Наличие массовых параметров нарушает инвариантность относительно таких преобразований, что, по-видимому, ограничивает их физические приложения. Такая же проблема возникает для теорий, которые конформно-инвариантны на классическом уровне. Квантовые эффекты вводят массовую шкалу, в связи с чем становятся некорректными результаты, основанные на предположении о конформной инвариантности[2]. Хотя это означает, что конформные преобразования вряд ли могут иметь прямые физические следствия, они успешно применяются при анализе структуры теории гравитации и ее взаимодействия с материей. Такой подход может быть распространен и на теорию супергравитации, где его можно использовать для систематического анализа структуры теории вне массовой оболочки. Предлагаемые лекции посвящены введению в соответствующий формализм, а также изложению его применения к расширенной супергравитации.

Несмотря на свою внутреннюю самосогласованность и красоту, теории супергравитации оказываются довольно сложными. Поэтому важно найти аппарат, который сделал бы более прозрачной их структуру как классических теорий поля. Одна из основных проблем состоит в том, что для расширенных теорий с $N > 2$ не известна их формулировка вне массовой оболочки. Теории супергравитации с $N > 2$ строятся преимущественно на основе полей, непосредственно соответствующих физическим степеням свободы. Но такие поля не преобразуются по какому-либо определенному представлению алгебры суперсимметрии; соответствующие (анти) коммутаторы образуют замкнутую алгебру лишь при учете уравнений движения. Следовательно, такое представление полей имеет смысл лишь при заданном действии. Подобные формулировки на-

---

[1] *B. de Wit*, NIKHEF-H, Амстердам, Нидерланды.

[2] В последнее время установлено существование ультрафиолетово-конечных теорий, инвариантных и на квантовом уровне относительно глобальной (суперсимметричная теория Янга — Миллса с $N = 4$) или локальной (конформная супергравитация с $N = 4$) суперконформной группы, что, возможно, указывает на важную роль конформной группы в физике. — *Прим. перев.*

зываются "формулировками на массовой оболочке", так как они определяют представление алгебры лишь для степеней свободы на массовой оболочке. В этом состоит их отличие от формулировок вне массовой оболочки, которые не связаны с определенным выбором действия и которые реализуют алгебру без привлечения уравнений движения. Теоретико-групповая структура таких представлений, очевидно, гораздо более прозрачна, благодаря чему значительно упрощается квантование теории и анализ инвариантных контрчленов.

Часть полей в формулировке вне массовой оболочки, которые могут быть исключены с помощью уравнений движения, называются вспомогательными полями. Эти поля играют сравнительно маловажную роль в динамике теории. Тем не менее, лагранжианы, основанные на различных представлениях вне массовой оболочки и описывающие одинаковую физику на классическом уровне, могут приводить к различным следствиям на квантовомеханическом уровне.

Но даже в том случае, когда формулировка теории вне массовой оболочки известна, возникают существенные трудности, связанные с нелинейностью законов преобразования и с большим числом имеющихся полей. В теориях с расширенной суперсимметрией такие трудности необычайно велики. К тому же приходится учитывать возможность существования иных, неэквивалентных формулировок вне массовой оболочки, которые требуют отдельного изучения.

Всеми изложенными соображениями и мотивируются исследования конформно-инвариантных формулировок. В них стандартную конформную симметрию объединяют с суперсимметрией и рассматривают представления вне массовой оболочки возникающей суперконформной алгебры. Более высокий порядок симметрии ограничивает структуру законов преобразования и позволяет разбить калибровочные поля суперсимметрии на меньшие неприводимые наборы. Вследствие этого суперконформные законы преобразования и соответствующие инварианты имеют более простую форму. Мультиплет, отвечающий конформной супергравитации, лежит в основе любой теории супергравитации, а последовательным добавлением других мультиплетов можно получить все допустимые формулировки вне массовой оболочки супергравитаций Пуанкаре или де Ситтера. Таким образом, имеется единое описание всех теорий супергравитации и нет необходимости исследовать каждую из допустимых формулировок по отдельности. При этом суперконформный подход оставляет возможность анализа теорий, основанных на супералгебрах Пуанкаре или де Ситтера, так как их симметрии являются подмножеством суперконформных симметрий, а соответствующие им мультиплеты могут быть найдены комбинированием суперконформных мультиплетов. После фиксации "лишних" симметрий калибровкой полученный мультиплет совпадает с супергравитацией Пуанкаре или де Ситтера.

В данных лекциях суперконформный подход будет изложен в компонентном описании. Последнее обстоятельство не принципиально – такой подход может быть развит и в рамках суперпространственного описания. Наш выбор объяс-

няется тем, что основные понятия, по-видимому, проще усвоить, рассматривая обычные поля. Читателю же, интересующемуся суперпространственным подходом, мы советуем обратиться к литературе. Лекции построены следующим образом. В § 2 мы рассмотрим формулировку простой супергравитации, основанную на супералгебре Пуанкаре и стандартных связях. В § 3 на простом примере объясняется суть метода использования калибровочно-эквивалентных формулировок. Следующий параграф (§ 4) посвящен калибровочной теории суперконформной алгебры, основанной на части полей, отвечающих конформной супергравитации. В § 5 рассматриваются конформно-инвариантные теории в d измерениях; здесь также объясняется использование компенсирующих полей в гравитации. Более общий подход развит в § 6, где мы исходим из токов полей материи, которые могут взаимодействовать с суперконформными калибровочными полями. В качестве примера мы построим мультиплет токов в суперсимметричной теории Максвелла с $N = 4$. В § 7 рассматривается конформная супергравитация с $N = 4$, а § 8 посвящен различным приложениям конформных методов к супергравитации Пуанкаре с $N = 2$. В § 9 приведены некоторые полезные ссылки.

§ 2. Калибровочная теория для супералгебры Пуанкаре

Схема построения калибровочной теории для конечномерной алгебры Ли весьма проста. Вначале следует приписать каждому генератору алгебры свое калибровочное поле (связность). Для супералгебры делается различие между бозонными и фермионными генераторами: первым сопоставляются коммутирующие, а вторым – антикоммутирующие калибровочные поля. Предполагается, что набор генераторов замкнут относительно операции (анти) коммутирования: (анти) коммутатор двух генераторов должен быть пропорционален линейной комбинации генераторов (коэффициенты пропорциональности называются структурными константами $f_{AB}{}^{C}$):

$$[t_A,\ t_B\} = f_{AB}{}^{C}\, t_C\ . \tag{2.1}$$

Здесь t_A – генераторы группы; скобки $[\ ,\ \}$ обозначают антикоммутатор, если оба генератора t_A и t_B являются фермионными, и коммутатор – во всех остальных случаях. Калибровочные поля $W_\mu{}^A$, сопоставленные генератору t_A, преобразуются следующим образом:

$$\delta W_\mu{}^A = \partial_\mu \xi^A - f_{BC}{}^{A}\, W_\mu{}^B \xi^C\ , \tag{2.2}$$

где ξ^A – зависящие от пространственно-временных координат параметры инфинитезимальных калибровочных преобразований. Структурные константы входят также в определение калибровочных напряженностей (кривизн):

$$R_{\mu\nu}{}^A = \partial_\mu W_\nu{}^A - \partial_\nu W_\mu{}^A - f_{BC}{}^{A}\, W_\mu{}^B W_\nu{}^C\ , \tag{2.3}$$

которые ковариантно преобразуются под действием калибровочной группы:

$$\delta R_{\mu\nu}{}^{A} = -f_{BC}{}^{A}\, R_{\mu\nu}{}^{B}\, \xi^{C} . \tag{2.4}$$

Калибровочными симметриями супергравитации являются общекоординатные преобразования (локальные трансляции), преобразования Лоренца и преобразования суперсимметрии. Эти преобразования образуют суперкалгебру Пуанкаре. Поэтому естественно попытаться построить супергравитацию как калибровочную теорию соответствующей "супергруппы", следуя только что описанной схеме. Обозначив генераторы супералгебры Пуанкаре через M_{ab}, P_a и Q_α, мы приведем выражения для отличных от нуля (анти) коммутаторов:

$$\begin{aligned}
&[M_{ab}, M_{cd}] \sim \eta_{ac} M_{bd} + \eta_{bd} M_{ac} - \eta_{bc} M_{ad} - \eta_{ad} M_{bc} ,\\
&[M_{ab}, P_c] \sim \eta_{ac} P_b - \eta_{bc} P_a ,\\
&[M_{ab}, Q_\alpha] \sim (\sigma_{ab} Q)_\alpha ,\\
&\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} \sim \gamma^{a}{}_{\alpha\beta} P_a .
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Сопоставим теперь генераторам M_{ab}, P_a и Q_α соответствующие калибровочные поля $\omega_\mu{}^{ab}$, $e_\mu{}^{a}$ и ψ_μ. Тогда из (2.5) следуют их законы преобразования

$$\begin{aligned}
&\delta\omega_\mu{}^{ab} = \mathcal{D}_\mu \varepsilon^{ab} ,\\
&\delta e_\mu{}^{a} = \varepsilon^{ab} e_\mu{}^{b} + \mathcal{D}_\mu \xi^{a}_{P} + \varepsilon\gamma^{a} \psi_\mu ,\\
&\delta\psi_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon^{ab} \sigma_{ab}\psi_\mu + 2\mathcal{D}_\mu \varepsilon ,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где ε^{ab}, ξ^{a}_{P} и ε_α – параметры инфинитезимальных M- , P- и Q-преобразований, а $\mathcal{D}_\mu$ – лоренц-ковариантная производная. Легко найти также выражения для кривизн:

$$\begin{aligned}
&R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) = \partial_\mu \omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu \omega_\mu{}^{ab} - \omega_\mu{}^{a}{}_{c}\, \omega_\nu{}^{cb} - \omega_\mu{}^{b}{}_{c}\, \omega_\nu{}^{ca} ,\\
&R_{\mu\nu}{}^{a}(P) = \mathcal{D}_\mu e_\nu{}^{a} - \mathcal{D}_\nu e_\mu{}^{a} - \frac{1}{2}\bar{\psi}_\mu \gamma^{a} \psi_\nu ,\\
&R_{\mu\nu}(Q) = \mathcal{D}_\mu \psi_\nu - \mathcal{D}_\nu \psi_\mu .
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Как обычно, эти тензоры возникают в правой части (анти) коммутатора двух полностью ковариантных производных (аналог тождества Риччи). Точно так же рассмотрение циклической суммы тройного коммутатора ковариантных

производных с использованием тождества Якоби приводит к тождествам Бьянки

$$\sum_{(abc)} (D_a R_{bc}{}^{de}(M) - R_{ab}{}^{f}(P) R_{cf}{}^{de}(M)) = 0, \tag{2.8 а}$$

$$\sum_{(abc)} (D_a R_{bc}{}^{d}(P) + R_{ab}{}^{dc}(M) - R_{ab}{}^{f}(P) R_{cf}{}^{d}(P)) = 0, \tag{2.8 б}$$

где через $\sum\limits_{(abc)}$ обозначена циклическая сумма по лоренцевым индексам a, b, c. Здесь производные D_μ ковариантны относительно преобразований Лоренца и суперсимметрии. Отметим, что мы заменили "мировые" индексы лоренцевыми, используя матрицу, обратную матрице $e_\mu{}^a$. Поле $e_\mu{}^a$ играет роль тетрады: четыре ковариантных вектора $e_\mu{}^a$ задают базис в линейном касательном пространстве в каждой точке искривленного пространства. Ввиду этого естественно потребовать, чтобы матрица $e_\mu{}^a$ была несингулярной, и определить поле обратной тетрады $e_a{}^\mu$:

$$e_a{}^\mu e_\mu{}^b = \delta_a{}^b, \quad e_\mu{}^a e_a{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu. \tag{2.9}$$

Группу лоренцевых вращений (M) в этом случае можно назвать "структурной группой" или "группой в касательном пространстве ", поскольку она отвечает вращениям локальной лоренцевой системы координат в касательном пространстве.

Подчеркнем, что выше мы рассматривали группу Пуанкаре как группу внутренних симметрий, не имеющую отношения к пространству-времени. Действительно, мы отдельно рассматриваем общекоординатные преобразования, которые отвечают репараметризациям пространственно-временного многообразия,

$$x^\mu \to x^\mu + \xi^\mu(x). \tag{2.10}$$

Под действием этих преобразований калибровочные поля и кривизны преобразуются как ковариантные тензоры.

Теперь попытаемся понять, каким образом можно связать калибровочные преобразования из группы Пуанкаре с симметриями пространства-времени. Для этого запишем общекоординатное преобразование $e_\mu{}^a$ в виде

$$\delta_{\text{о.к.п.}}(\xi) e_\mu{}^a = -\partial_\mu \xi^\nu e_\nu{}^a - \xi^\nu \partial_\nu e_\mu{}^a =$$

$$= -\mathfrak{D}_\mu(\xi^\nu e_\nu{}^a) - (\xi^\nu \omega_\nu{}^{ab}) e_\mu{}^b - (\tfrac{1}{2}\xi^\nu \bar{\psi}_\nu)\gamma^a \psi_\mu + \xi^\nu R_{\mu\nu}{}^a(P). \tag{2.11}$$

Первые три члена в выражении (2.11) отвечают P-, M- и Q- преобразованиям с параметрами, зависящими от полей. Поэтому с учетом формул (2.6) мы по-

лучаем

$$\{\delta_{\text{о.к.п.}}(\xi) + \delta_P(\xi^\nu e_\nu{}^b) + \delta_M(\xi^\nu \omega_\nu{}^{bc}) + \delta_Q(\frac{1}{2}\xi^\nu\psi_\nu)\}\ e_\mu{}^a = \xi^\nu R_{\mu\nu}{}^a(P). \tag{2.12}$$

Таким образом, с точностью до члена, пропорционального $R(P)$, общекоординатное преобразование просто совпадает с суммой специальных P-, M- и Q-преобразований. Этим мотивируется добавление условия

$$R_{\mu\nu}{}^a(P) = 0, \tag{2.13}$$

связывающего преобразования из группы Пуанкаре с общекоординатными преобразованиями. Связь вида (2.13) называется *стандартной* связью, поскольку она выражает спиновую связность $\omega_\mu{}^{ab}$ через остальные поля. Решение уравнения (2.13) можно записать следующим образом:

$$\omega_\mu{}^{ab}(e,\ \psi) = \frac{1}{2}\ e_\mu{}^c(\hat{\Omega}_{ab}{}^c - \hat{\Omega}_{bc}{}^a - \hat{\Omega}_{ca}{}^b). \tag{2.14}$$

Объект неголономности $\Omega_{ab}{}^c$ измеряет некоммутативность тетрадного базиса

$$\Omega_{ab}{}^c = e_a{}^\mu e_b{}^\nu(\partial_\mu e_\nu{}^c - \partial_\nu e_\mu{}^c). \tag{2.15}$$

Величина $\hat{\Omega}$ есть результат "ковариантизации" Ω по отношению к суперсимметрии:

$$\hat{\Omega}_{ab}{}^c = \Omega_{ab}{}^c - \frac{1}{2}e_a{}^\mu e_b{}^\nu \bar{\psi}_\mu\gamma^c\psi_\nu\ . \tag{2.16}$$

Подстановка (2.14) в $R(M)$ приводит к обобщению тензора Римана, ковариантному относительно суперсимметрии. Соответствующая свертка дает обобщенный тензор Риччи

$$R_{\mu\nu}(e,\ \psi) = R_{\mu\rho}{}^{ab}(M)\ e_b{}^\rho\ e_{a\nu}\,, \tag{2.17}$$

который симметричен в силу равенства (2.13) и тождества Бьянки (2.8 б).

Прямым следствием стандартной связи (2.13) является уменьшение числа гравитационных степеней свободы с 30 до 6. Далее, ввиду того, что $\omega_\mu{}^{ab}$ уже больше не есть независимое поле, его законы преобразования не совпадают с диктуемыми супералгеброй Пуанкаре. Действительно, связь (2.13) не является инвариантной относительно P- и Q- преобразований:

$$\begin{aligned}\delta_P R_{\mu\nu}{}^a(P) &= -\xi_P{}^b\ R_{\mu\nu}{}^{ab}(M),\\ \delta_Q R_{\mu\nu}{}^a(P) &= \bar{\varepsilon}\gamma^a\ R_{\mu\nu}(Q).\end{aligned} \tag{2.18}$$

Это приводит к дополнительным членам, пропорциональным компонентам кри-

визны, в исходных формулах преобразования $\omega_\mu{}^{ab}$. В результате новые преобразования не образуют супералгебру Пуанкаре при наличии связи (2.13). Важно уяснить себе, что соотношение (2.12) не является универсальным; оно справедливо лишь при действии на тетраду. Значит, наложив условие (2.13), мы не добились полного выражения трансляций P через общекоординатные и остальные калибровочные преобразования. Тем не менее, после наложения связи P-преобразования можно не учитывать, а их роли в калибровочной алгебре начинают выполнять общекоординатные преобразования. Строго говоря, мы получили не калибровочную теорию супералгебры Пуанкаре, а теорию модифицированной алгебры, которая нетривиальным образом включает в себя общекоординатные преобразования.

§ 3. Калибровочно-эквивалентные формулировки; простой пример

Как уже было сказано, ввиду сложности теорий супергравитации желательно использовать формулировки с максимально возможной калибровочной симметрией. Именно по этой причине мы отдаем предпочтение суперконформному подходу. Как мы увидим, наличие дополнительных симметрий не ограничивает возможностей применения этого формализма. Как оказывается в конце вычислений можно устранить "лишние" симметрии, потребовав выполнения ряда калибровочных условий. Это позволяет строить интересующие нас теории с меньшей симметрией как калибровочно-эквивалентные подклассу теорий с большей симметрией. Мы подчеркиваем, что калибровочную эквивалентность будем понимать лишь в классическом смысле. В полной квантовой теории вопрос калибровочной эквивалентности не является тривиальным, особенно в случае конформно-инвариантных теорий.

В данном параграфе мы поясним метод использования калибровочно-эквивалентных формулировок простым примером. Мы рассмотрим теорию массивных векторных полей, преобразующихся по присоединенному представлению группы $SU(N)$

$$L = \mathrm{Tr}\ \left(\frac{1}{4}\ G^2_{\mu\nu}\ (W) + \ \frac{1}{2}\ m^2 W^2_\mu \right), \tag{3.1}$$

где W_μ и $G_{\mu\nu}$ – антиэрмитовы бесследовые матрицы размера $N \times N$. Тензор $G_{\mu\nu}$ имеет обычный вид

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - [W_\mu , W_\nu]. \tag{3.2}$$

Ввиду наличия массового члена приведенный лагранжиан не инвариантен относительно локальной $SU(N)$-симметрии, но имеет соответствующую глобальную инвариантность

$$W_\mu \to W'_\mu = V W_\mu V^{-1}, \tag{3.3}$$

где V – элемент группы $SU(N)$.

Построим теперь калибровочно-эквивалентный вариант этой теории, который имел бы локальную $SU(N)$-инвариантность. Это достигается введением скалярных полей $\Phi(x)$, принимающих значения в $SU(N)$. Иными словами, $\Phi(x)$ есть унитарная матрица с единичным детерминантом. Чтобы исключить появление дополнительных степеней свободы, потребуем, чтобы матрица $\Phi(x)$ преобразовалась под действием локальных $SU(N)$, -преобразований. Одновременно $\Phi(x)$ преобразуется относительно глобальной группы $SU(N)$, упомянутой выше. Таким образом, имеем законы преобразования

$$\begin{aligned} &\Phi(x) \to \Phi'(x) = U(x)\,\Phi(x) && (\text{локальная группа } SU(N)),\\ &\Phi(x) \to \Phi'(x) = \Phi(x)V^{-1} && (\text{глобальная группа } SU(N)), \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $U(x)$ – матрица, отвечающая локальным, а V – глобальным преобразованиям группы $SU(N)$.

Ковариантные производные матрицы Φ определяются обычным образом:

$$D_\mu \Phi = (\partial_\mu - A_\mu)\Phi, \tag{3.5}$$

где A_μ – $SU(N)$-калибровочное поле, записанное в виде антиэрмитовой бесследовой $N \times N$-матрицы. Это калибровочное поле не изменяется при глобальных преобразованиях.

При локальных $SU(N)$-преобразованиях имеем

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = U(x)\,A_\mu(x)\,U^{-1}(x) + \partial_\mu U(x) U^{-1}(x). \tag{3.6}$$

Снова, чтобы избежать появления дополнительных степеней свободы, наложим на A_μ калибровочное условие

$$W_\mu = -\Phi^{-1} D_\mu \Phi \equiv \Phi^{-1} A_\mu \Phi + \partial_\mu \Phi^{-1}\,\Phi. \tag{3.7}$$

Здесь мы замечаем, что поля A_μ и W_μ связаны между собой $SU(N)$-калибровочным преобразованием с параметром Φ. Это поясняет общую стратегию: все калибровочно-инвариантные поля, преобразующиеся относительно глобальной группы $SU(N)$, следует записать через аналогичные поля, преобразующиеся относительно локальной группы $SU(N)$, причем закон соответствия должен быть в точности $SU(N)$-калибровочным преобразованием. Другими словами, калибровочная инвариантность исходных полей явится следствием того, что неинвариантность новых полей будет компенсироваться изменением дополнительных полей – параметров в отмеченном выше калибровочном преобразовании. По этой причине поля Φ называются *компенсирующими* полями.

Используя приведенные определения, мы получаем альтернативную запись

лагранжиана рассматриваемой теории

$$L = \mathrm{Tr}\ (\frac{1}{4}\ G^2_{\mu\nu}\ (A) + \frac{1}{2}\ m^2\ \Phi^{-1} D_\mu \Phi \Phi^{-1} D_\mu \Phi) =$$

$$= \mathrm{Tr}\ (\frac{1}{4}\ G^2_{\mu\nu}\ (A) - \frac{1}{2}\ m^2\ D_\mu \Phi D_\mu \Phi^{-1}). \tag{3.8}$$

Этот лагранжиан инвариантен одновременно относительно локальных и глобальных преобразований $SU(N)$, приведенных в формулах (3.4) и (3.6). Эквивалентность лагранжиана (3.8) лагранжиану (3.1) легко установить, "убрав" зависимость от Φ в определение поля A_μ с помощью зависящего от Φ калибровочного преобразования [что есть, очевидно, обращение рассуждения, приводящего к выражению (3.8)]. Можно также выбрать соответствующую калибровку. Выбрав калибровочное условие

$$\Phi(x) = 1, \tag{3.9}$$

мы находим

$$D_\mu \Phi = -A_\mu = -W_\mu, \tag{3.10}$$

так что лагранжиан (3.8) прямо сводится к (3.1). Несмотря на эквивалентность этих двух формулировок, по некоторым причинам одна из них может быть более предпочтительной, нежели другая. Очевидно, что первая теория основана на неприводимом мультиплете группы $SU(N)$, которому отвечают $4(N^2-1)$ степеней свободы, описываемых полями W_μ. Вторая теория обладает калибровочной $SU(N)$-инвариантностью и включает два неприводимых мультиплета, представленные калибровочными полями A_μ и скалярами Φ. Калибровочным полям отвечают $3(N^2-1)$ степеней свободы[1], тогда как остальные (N^2-1) содержатся в компенсирующих скалярах. Условно можно сказать, что мы разложили поле W_μ на "поперечные" и "продольные" компоненты, используя дополнительную калибровочную инвариантность. Поперечным компонентам может соответствовать лишь стандартный лагранжиан, описывающий безмассовые степени свободы со спином 1. Для описания массивного случая необходимо ввести дополнительные степени свободы в виде компенсирующих полей.

Причина, по которой в супергравитации мы отдаем предпочтение формулировкам второго типа, заключается в том, что наличие более широкой калибровочной группы упрощает структуру соответствующей теории, а также позволяет рассматривать мультиплеты с меньшим числом степеней свободы.

---

[1] Здесь и в дальнейшем в данной лекции под числом степеней свободы понимается "число степеней свободы вне массовой оболочки", т.е. разность полного числа компонент полей и размерности калибровочной группы. — *Прим. перев.*

Для получения теорий без дополнительной симметрии приходится вводить компенсирующие мультиплеты. Примеры таких компенсирующих мультиплетов в случаях гравитации и супергравитации будут приведены в § 5 и 8.

§ 4. Калибровочная теория, основанная на суперконформной алгебре

Максимальная симметрия, которая может быть рассмотрена в рамках супергравитации, генерируется элементами суперконформной алгебры. Суперконформная алгебра, обозначаемая символом $SU(2,\ 2|\,N)$, есть обобщение конформной алгебры $SU(2,2)$. Последняя содержит генераторы преобразований Лоренца M, трансляций P, дилатаций D и специальных конформных бустов K. Добавив к ним генераторы суперсимметрии Q, можно убедиться, что коммутатор генераторов суперсимметрии и конформных бустов порождает новый тип суперсимметрии. Обозначим генератор этой "специальной" суперсимметрии через S. Для замыкания алгебры необходимо также включить генераторы киральных $U(N)$-преобразований (при $N = 4$ достаточно $SU(4)$-генераторов). Генераторы $SU(2,\ 2|\,N)$ и соответствующие им калибровочные поля приведены в табл. 1.

Перечислим теперь отличные от нуля (анти) коммутаторы генераторов $SU(2,\ 2|\,N)$. Для конформной подалгебры мы имеем

$$
\begin{aligned}
&[M,\ M]\sim M, \quad [M,\ P]\sim P,\\
&[D,\ P]\sim P, \quad [M,\ K]\sim K,\\
&[D,\ K]\sim K, \quad [K,\ P]\sim D+M.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Таблица 1

Генераторы суперконформной алгебры и отвечающие им калибровочные поля. В последнем столбце указано число степеней свободы, отвечающее каждому калибровочному полю. В случае $N = 4$ симметрия $U(1)$ отсутствует

Суперконформные калибровочные симметрии			Калибровочные поля	
4	Трансляции	P	$e_\mu^{\ a}$	45
6	Лоренцевы вращения	M	$\omega_\mu^{\ ab}$	
1	Дилатации	D	b_μ	
4	Конформные бусты	K	$f_\mu^{\ a}$	
$4N$	Суперсимметрии	Q	$\psi_\mu^{\ i}$	$24N$
$4N$	Специальные суперсимметрии	S	$\varphi_\mu^{\ i}$	
N^2-1	Киральная $SU(N)$	E	$V_\mu{}^i{}_j$	$3(N^2-1)$
1	Киральная $U(1)$	A	A_μ	3

Ее суперсимметричное расширение определяется следующими (анти) коммутаторами:

$$
\begin{array}{ll}
\{Q,\ Q\}\sim P, & [K,\ Q]\sim S, \\
[P,\ S]\sim Q, & \{S,\ S\}\sim K, \\
\{Q,\ S\}\sim D+M+(S)U(N), & \\
[M,\ Q]\sim Q, & [M,\ S]\sim S, \\
[D,\ Q]\sim Q, & [D,\ S]\sim S, \\
[U(N),\ Q]\sim Q, & [U(N),\ S]\sim S.
\end{array}
\tag{4.2}
$$

Как было отмечено в § 2, значения структурных констант калибровочной алгебры определяются законами преобразования калибровочных полей. Ниже приведены преобразования полей из табл. 1 под действием Q и S суперсимметрий, дилатаций, конформных бустов и киральных $U(1)$-преобразований (что касается законов преобразований относительно остальных симметрий, то их легко восстановить по индексной структуре полей):

$$
\begin{aligned}
&\delta e_\mu{}^a = -\Lambda_D e_\mu{}^a + (\bar{\varepsilon}^i \gamma^a \psi_{\mu i} + \text{э.с.}),\\
&\delta \omega_\mu{}^{ab} = \Lambda_K{}^{[a} e_\mu{}^{b]} - (\bar{\varepsilon}^i \sigma^{ab} \varphi_{\mu i} + \text{э.с.}) + (\bar{\psi}_\mu{}^i \sigma^{ab} \eta_i + \text{э.с.}),\\
&\delta b_\mu = \partial_\mu \Lambda_D + \Lambda_K{}^a e_\mu{}^a + \frac{1}{2}(\bar{\varepsilon}^i \varphi_{\mu i} + \text{э.с.}) - \frac{1}{2}(\bar{\psi}_\mu{}^i \eta_i + \text{э.с.}),\\
&\delta f_\mu{}^a = \mathfrak{D}_\mu \Lambda_K{}^a + \Lambda_D f_\mu{}^a + \frac{1}{2}(\bar{\eta}^i \gamma^a \varphi_{\mu i} + \text{э.с.}),\\
&\delta \psi_\mu{}^i = 2\mathfrak{D}_\mu \varepsilon^i - \frac{1}{2}\Lambda_D \psi_\mu{}^i - \gamma_\mu \eta^i - i\left(\frac{4-N}{4N}\right)\Lambda_A \psi_\mu{}^i,\\
&\delta \varphi_\mu{}^i = 2\mathfrak{D}_\mu \eta^i + \frac{1}{2}\Lambda_D \varphi_\mu{}^i - 2 f_\mu{}^a \gamma_a \varepsilon^i + \Lambda_K{}^a \gamma_a \psi_\mu{}^i + i\left(\frac{4-N}{4N}\right)\Lambda_A \varphi_\mu{}^i,\\
&\delta V_\mu{}^i{}_j = \bar{\varepsilon}^i \varphi_{\mu j} - \bar{\psi}_\mu{}^i \eta_j - \frac{1}{N}\delta^i{}_j (\bar{\varepsilon}^k \varphi_{\mu k} - \bar{\psi}_\mu{}^k \eta_k) - \text{э.с.},\\
&\delta A_\mu = i(\bar{\varepsilon}^i \varphi_{\mu i} - \text{э.с.}) - i(\bar{\psi}_\mu{}^i \eta_i - \text{э.с.}) + \partial_\mu \Lambda_A .
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Здесь ε^i и η_i – спинорные параметры, отвечающие Q- и S-суперсимметриям. Мы использовали киральные $SU(N)$-обозначения, при которых ε^i и η_i имеют положительную киральность. Спиноры противоположной киральности $-\varepsilon_i$ и η^i Аналогичные обозначения использованы и для $\psi_\mu{}^i$ и $\varphi_{\mu i}$. Параметры дилатаций, конформных бустов и $U(1)$-преобразований обозначены через Λ_D, Λ_K и Λ_A. Отметим, что киральный заряд $\psi_\mu{}^i$ и $\psi_\mu{}^i$ при $N = 4$ равен нулю. Произ-

Таблица 2

Кривизны градуированной алгебры $SU(2, 2 | N)$

$$R_{\mu\nu}{}^a(P) = \mathcal{D}_{[\mu} e_{\nu]}{}^a - \frac{1}{2} \bar{\psi}_{[\mu}{}^i \gamma^a \psi_{\nu]i} ,$$

$$R_{\mu\nu}{}^{ab}(M) = \partial_{[\mu}\omega_{\nu]}{}^{ab} - \omega_{[\mu}{}^{ac}\omega_{\nu]}{}^{cb} - f_{[\mu}{}^{[a} e_{\nu]}{}^{b]} + \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{[\mu}{}^i \sigma^{ab} \varphi_{\nu]i} + \text{э.с.}),$$

$$R_{\mu\nu}(D) = \partial_{[\mu} b_{\nu]}{}^a - f_{[\mu}{}^a e_{\nu]}{}^a - \frac{1}{4} (\bar{\psi}_{[\mu}{}^i \varphi_{\nu]i} + \text{э.с.}),$$

$$R_{\mu\nu}{}^a(K) = \mathcal{D}_{[\mu} f_{\nu]}{}^a - \frac{1}{4} \bar{\varphi}_{[\mu}{}^i \gamma^a \varphi_{\nu]i} ,$$

$$R_{\mu\nu}{}^i(Q) = \mathcal{D}_{[\mu} \psi_{\nu]}{}^i - \frac{1}{2} \gamma_{[\mu} \varphi_{\nu]}{}^i ,$$

$$R_{\mu\nu}{}^i(S) = \mathcal{D}_{[\mu} \varphi_{\nu]}{}^i + f_{[\mu}{}^a \gamma_a \psi_{\nu]}{}^i ,$$

$$R_{\mu\nu}(A) = \partial_{[\mu} A_{\nu]}{}^a - \frac{1}{2} i (\bar{\psi}_{[\mu}{}^i \varphi_{\nu]i} - \text{э.с.}),$$

$$R_{\mu\nu}{}^i{}_j(V) = \partial_{[\mu} V_{\nu]}{}^i{}_j - V_{[\mu}{}^i{}_k V_{\nu]j}{}^k -$$

$$- \frac{1}{2} (\bar{\psi}_{[\mu}{}^i \varphi_{\nu]j} - \frac{1}{N} \delta^i{}_j \bar{\psi}_{[\mu}{}^k \varphi_{\nu]k} - \text{э.с.})$$

водные $\mathcal{D}_\mu$ являются ковариантными относительно M-, D- и $(S)U(N)$-преобразований. Исходя из законов преобразований (4.3), нетрудно найти тензоры кривизны для группы $SU(2, 2 | N)$. Они представлены в табл. 2.

Дальнейшее построение калибровочной теории аналогично изложенному в § 2 для случая суперфлгебры Пуанкаре. Чтобы установить соотношение между преобразованиями группы $SU(2, 2 | N)$ и пространственно-временными преобразованиями, необходимо наложить на компоненты кривизны некоторые связи. Заранее не ясно, какое число связей необходимо. Используя информацию о частных случаях $N = 1$ и $N = 2$, мы выберем максимальный набор обычных связей. Исследование явного вида тензоров кривизны показывает, что $R(P)$, $R(M)$, $R(D)$ и $R(Q)$ содержат члены, пропорциональные полю связности, умноженному на поле тетрады. Поэтому наложив связи на кривизны, мы можем выразить

$\omega_\mu{}^{ab}$, $f_\mu{}^a$ и $\varphi_\mu{}^i$ через остальные поля. Для этого достаточно взять следующий набор связей:

$$\hat{R}_{\mu\nu}{}^a(P) = 0,$$
$$e^\nu{}_b \hat{R}_{\mu\nu}{}^{ab}(M) = 0, \tag{4.4}$$
$$\gamma^\mu \hat{R}_{\mu\nu}{}^i(Q) = 0.$$

С первого взгляда может показаться, что допустимо также ограничение на $R(D)$. Но можно доказать, что при наличии первой связи (4.4) величина $R(D)$ не является более независимой [это следует из тождеств Бьянки для $SU(2,2|N)$, аналогичных равенству (2.8 б)]. Связи (4.4) дают возможность выразить $\omega_\mu{}^{ab}$, $f_\mu{}^a$ и $\varphi_\mu{}^i$ через остальные калибровочные поля $SU(2,2|N)$, что приводит к модификации исходных законов преобразования (4.3) для этих трех величин. Тогда необходимо модифицировать и выражения для кривизн, чтобы восстановить их ковариантность. Соответствующие дополнительные члены были неявно учтены в связях (4.4) путем замены исходных напряженностей R напряженностями $\hat{R}$. Отметим, что детальная форма стандартных связей не существенна, если только они позволяют полностью исключить ряд калибровочных полей.

Прямым следствием стандартных связей является ограничение числа степеней свободы. Ввиду инвариантности соотношений (4.4) относительно конформных бустов преобразования зависимых полей под действием K не изменяются и имеют тот же вид, что и в (4.3). Единственное независимое поле, которое преобразуется под действием K, есть дилатационное поле b_μ. Поэтому K-преобразования зависимых полей полностью определяются их зависимостью от b_μ.

На этой стадии уже можно наложить калибровочное условие, нарушающее инвариантность относительно конформных бустов. Ввиду того что b_μ – единственное из независимых полей, которое преобразуется под действием K, выбор калибровочного условия очевиден (заметим, что b_μ можно рассматривать как компенсирующее поле для K-преобразований):

$$b_\mu = 0. \tag{4.5}$$

Помимо нарушения K-симметрии, это условие влияет также и на все другие преобразования (супер)конформной алгебры. Например, оно нарушает и инвариантность относительно дилатаций. Можно, однако, определить модифицированные масштабные преобразования, добавляя к D-преобразованию специальное, зависящее от полей K-преобразование, призванное компенсировать изменения, внесенные условием (4.5). Соответствующее правило называется "прави-

лом разложения", которое выполняется единообразно на всех полях:

$$D'(\Lambda) = D(\Lambda) + K(-\partial_\mu \Lambda e^\mu_a \quad). \tag{4.6}$$

Соотношением (4.6) определяются новые преобразования дилатации D', выражаемые через исходные преобразования из (супер)конформной алгебры. Преобразование K в формуле (4.6) выбрано таким образом, что калибровочное условие (4.5) остается инвариантным относительно D'. Аналогичные правила разложения справедливы и для Q- и S- преобразований суперсимметрии. Наличие таких правил разложения характерно для теории, в которой исходная симметрия нарушена до более узкой за счет выбора калибровочного условия. Обе формулировки (до и после нарушения симметрии) по определению являются калибровочно-эквивалентными. Подобную ситуацию мы уже обсуждали в предыдущем параграфе. Вторая формулировка, отвечающая наложенной калибровке (4.5), очевидно, более сложна (например, модифицированные генераторы калибровочных преобразований типа D' имеют более громоздкую структуру). В данных лекциях мы хотим продемонстрировать преимущество формулировок с более широкой калибровочной группой, в которых выбор калибровки производится лишь в самом конце построения теории.

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о числе степеней свободы, отвечающем различным полем. Гравитационный сектор теории описывается полями $e_\mu{}^a$, $\omega_\mu{}^{ab}$, $f_\mu{}^a$ и b_μ, из которых лишь $e_\mu{}^a$ и b_μ являются независимыми. Следовательно, мы имеем 16 + 4 = 20 независимых компонент, из которых 6 + 4 + 4 + 1 = 15 соответствуют калибровочным степеням свободы, отвечающим инвариантности относительно преобразований Лоренца, конформных бустов, общекоординатных преобразований и дилатаций. Таким образом, остается 5 гравитационных степеней свободы, что есть минимальное число, необходимое для описания частиц со спином 2. Заметим, что здесь не идет речь о динамических степенях свободы. Безмассовые частицы со спином 2 имеют лишь два состояния с разной спиральностью, но число компонент у отвечающего им поля должно быть достаточным для инвариантности относительно преобразований Лоренца *вне массовой оболочки*. Поэтому число компонент полей следует определять, исходя из *массивных* представлений, что приводит к пяти степеням свободы для спина 2. Такой же "подсчет вне массовой оболочки" может производиться и для супермультиплетов в целом, и это сыграло важную роль при исследовании формулировок суперсимметричных теорий с учетом вспомогательных полей.

Таким же образом можно найти число степеней свободы, отвечающих фермионным калибровочным полям в теории $SU(2,2|N)$. Ввиду наличия третьей связи, единственными независимыми фермионными полями являются поля $\psi_\mu{}^i$, которые имеют 16 компонент при каждом значении индекса i. Вычитая калибровочные степени свободы, отвечающие Q- и S- суперсимметриям, мы получаем, что каждому из полей $\psi_\mu{}^i$ отвечает 16 − 4 − 4 = 8 степеней свобо-

ды. Этот результат снова согласуется с подсчетом вне массовой оболочки для спина $3/2$. Массивная частица со спином $3/2$ имеет 4 степени свободы, но для фермионов число компонент полей равно удвоенному числу физических состояний. Такие рассуждения показывают, что связи (4.4) приводят к аналогичным ограничениям для полей с разным спином, т.е. универсальны по спину. А именно они устраняют как можно большее число степеней свободы с низшими спинами. Подчеркнем, что последнее необходимо лишь для полей со спинами 2 и $3/2$. Для полей с меньшими спинами, например $(S)U(N)$-калибровочных полей, степени свободы с "младшими" спинами уже устранены с помощью соответствующих калибровочных преобразований.

Мы уже отметили выше, что связи, налагаемые на компоненты тензора кривизны группы $SU(2,2|N)$, являются связями обычного типа. В результате их наложения общекоординатные преобразования становятся нетривиальной частью калибровочной алгебры, занимая место трансляций P (которые в дальнейшем игнорируются). Таким образом мы получаем модифицированный вариант исходной алгебры. Эту новую алгебру можно назвать стандартной алгеброй суперсимметрии, так как в ней антикоммутатор двух преобразований суперсимметрии приводит к общекоординатному преобразованию. Следовательно, представления этой алгебры вне массовой оболочки должны включать равное число фермионных и бозонных степеней свободы. Такие простые рассуждения показывают, что построенная выше калибровочная теория не содержит полного набора калибровочных полей для суперконформной калибровочной алгебры. Гравитационный сектор этой теории описывает 5 степеней свободы, остальные бозонные степени свободы описываются $U(N)$- [или $SU(N)$-] калибровочными полями. В сумме мы имеем $5 + 3N^2$ (или $5 + 3N^2 - 3$ при $N = 4$) бозонных компонент. Число фермионных же степеней свободы равно всего лишь $8N$. Оба числа, очевидно, совпадают лишь при $N = 1$. Конформная супергравитация с $N = 1$ действительно основывается на калибровочных полях, приведенных в данном параграфе, но при более высоких N теория неполна. Мы вернемся к важной проблеме построения конформной супергравитации с $N > 1$ в § 7.

§ 5. Конформная теория гравитационного поля и полей материи в d измерениях

Чтобы лучше познакомиться с конформно-инвариантными теориями поля в формулировке, о которой говорилось выше, мы построим здесь конформно-инвариантные действия для полей материи с разными спинами. Так как конформная часть алгебры (4.2) одинакова при любой размерности пространства-времени d, мы будем считать d произвольным. В этом случае конформная группа изоморфна группе $SO(d, 2)$, а гравитационная часть преобразований (4.3) остается неизменной. Во второй половине данного параграфа мы покажем, как можно построить теорию Эйнштейна в рамках конформного подхода.

В качестве первого примера рассмотрим действительное скалярное поле φ, инвариантное относительно конформных бустов:

$$\delta_K \varphi = 0. \tag{5.1}$$

Преобразование поля φ относительно дилатации характеризуется вейлевским весовым фактором w, а именно:

$$\delta_D \varphi = w \Lambda_D \varphi. \tag{5.2}$$

Как уже было сказано выше, P-преобразования мы рассматривать не будем. Конформно-инвариантная производная в этом случае такова:

$$D_\mu \varphi = (\partial_\mu - w b_\mu)\varphi. \tag{5.3}$$

Ввиду того, что b_μ преобразуется под действием K-преобразований, производная $D_a \varphi$ более не является инвариантной:

$$\delta_K (D_a \varphi) = -w \Lambda_{Ka} \varphi. \tag{5.4}$$

Действуя еще раз ковариантной производной, получаем

$$D_\mu (D_a \varphi) = (\partial_\mu - (w+1)\, b_\mu) D_a \varphi - \omega_{\mu a}{}^{b} D_b \varphi + w f_\mu{}^{a} \varphi. \tag{5.5}$$

Заметим, что вейлевский вес производной $D_a \varphi$ равен $w+1$, так как эта производная включает в себя обратную тетраду (свертывающую мировой индекс). Используя законы преобразования калибровочных полей из (4.3), можно показать, что

$$\delta_K (D_\mu D_a \varphi) = -(w+1)(\Lambda_{Ka} D_\mu \varphi + \Lambda_{K\mu} D_a \varphi) + \Lambda_K{}^{b} D_b \varphi\, e_{\mu a},$$

$$\delta_K (D^a D_a \varphi) = (d - 2 - 2w)\, \Lambda_K{}^{a} D_a \varphi, \tag{5.6}$$

$$\delta_D (D^a D_a \varphi) = (w+2)\, \Lambda_D (D^a D_a \varphi).$$

Следовательно, при $w = \frac{1}{2}(d-2)$ мы получаем тензорную плотность

$$L = e \varphi D^a D_a \varphi, \tag{5.7}$$

которая инвариантна относительно общекоординатных преобразований, преобразований Лоренца, дилатаций и конформных бустов. Подчеркнем, что наличие в выражении (5.7) детерминанта репера e существенно для обеспечения инвариантности одновременно относительно общекоординатных преобразований и дилатаций.

Предполагая наличие стандартных связей (4.4), мы вновь заключаем, что b_μ – единственное независимое поле, преобразующееся относительно конформных бустов. Поэтому, если $w = \frac{1}{2}(d-2)$, выражение (5.7) не зависит от b_μ и может быть записано в виде

$$L = e \varphi \,\square^{\text{грав}} \varphi + \frac{1}{2}(d-2)\, e f_\mu{}^{\mu} \varphi^2, \tag{5.8}$$

где $\square^{\text{грав}}$ – стандартный лапласиан для скаляров в гравитационном поле, а $f_\mu{}^a$ – решение второго уравнения (4.4) при условии, что $b_\mu = 0$.

Инвариантная плотность для полей со спином 1/2 строится аналогично. Мы вводим дираковский спинор ψ, который преобразуется относительно конформных бустов и дилатаций следующим образом:

$$\delta_K \psi = 0, \quad \delta_D \psi = w \Lambda_D \psi. \tag{5.9}$$

Ковариантная производная

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - \frac{1}{2} \omega_\mu{}^{ab} \sigma_{ab} - w b_\mu)\psi \tag{5.10}$$

преобразуется под действием генератора K так:

$$\delta_K (D_\mu \psi) = (\frac{1}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu \Lambda_K{}^\nu - (w + \frac{1}{2}) \Lambda_{K\mu})\psi. \tag{5.11}$$

Следовательно, законы преобразования оператора Дирака, действующего на ψ, имеют вид

$$\delta_K (\hat{D}\psi) = (\frac{1}{2} d - \frac{1}{2} - w) \gamma_a \Lambda_K{}^a \psi,$$

$$\delta_D (\hat{D}\psi) = (1 + w) \Lambda_D \hat{D}\psi, \tag{5.12}$$

$$\hat{D} \equiv \gamma^a D_a,$$

так что при $w = ½ (d - 1)$ мы получаем лагранжиан

$$L = - e \bar{\psi} \hat{D} \psi, \tag{5.13}$$

который инвариантен относительно общекоординатных преобразований, преобразований Лоренца, дилатаций и конформных бустов. Если мы снова предполагаем справедливость связей (4.4), то конформно-инвариантная плотность (5.13) должна быть независимой от b_μ. Отметим, что (5.13) не содержит калибровочного поля $f_\mu{}^a$.

Наш следующий пример – максвелловское действие. Мы предлагаем читателю самому показать, что оно инвариантно относительно дилатаций лишь в случае четырех измерений, тогда как инвариантность относительно конформных бустов имеет место в пространстве любой размерности. Наконец, можно рассмотреть случай антисимметричного тензорного поля, которое, как оказывается, входит в суперконформные действия. Соответствующий лагранжиан в d измерениях имеет вид

$$L = - \frac{1}{4} e T^{ab} D^c D_c T_{ab} + 2(d - 2)^{-1} e T^{ab} D_a D^c T_{cb} . \tag{5.14}$$

Как нетрудно убедиться, он инвариантен относительно K- и D-преобразований в случае, если вейлевский вес поля T есть $w = ½ (d - 2)$.

Покажем теперь, как можно записать в конформно-инвариантном виде действие для гравитационного поля, не являющееся конформно-инвариантным. По существу мы рассмотрим аналог примера из § 3 для случая поля со спином 2. Для полноты включим в эйнштейновское действие и космологический член. Мы будем исходить из конформно-инвариантного действия (5.7) для скалярного поля φ с весом $\frac{1}{2}(d-2)$, к которому мы добавим также конформно-инвариантный член самодействия:

$$L = -e\varphi D^a D_a \varphi + eg\varphi^{2d/(d-2)}. \tag{5.15}$$

Причина, по которой мы выбрали знак минус перед кинетическим членом, станет ясной из дальнейшего. При наличии связей из конформной инвариантности (5.15) следует, что это выражение не зависит от дилатационного калибровочного поля b_μ. Используя связи, мы можем также найти явное выражение для $f_\mu{}^a$ (отбрасывая члены, зависящие от b_μ):

$$f_\mu{}^a = \frac{1}{d-2}\left(R_{\mu a}(e) - \frac{1}{2(d-1)}\, e_{\mu a} R(e)\right). \tag{5.16}$$

В результате действие (5.15) принимает вид

$$L = -e\varphi\Box^{\text{грав}}\varphi - \frac{(d-2)}{4(d-1)} R(e)\varphi^2 + eg\varphi^{2d/(d-2)}. \tag{5.17}$$

Этот лагранжиан зависит лишь от $e_\mu{}^a$ и φ, так как вся зависимость от b_μ сокращается, а $\omega_\mu{}^{ab}$ в силу связей выражается через $e_\mu{}^a$. Поля в выражении (5.17) инвариантны относительно K-преобразований, т.е. единственное нетривиальное конформное преобразование есть локальная дилатация

$$e_\mu{}^a \to e^{-\Lambda_D} e_\mu{}^a, \quad \varphi \to e^{\frac{1}{2}(d-2)\Lambda_D}\varphi. \tag{5.18}$$

Покажем теперь, что лагранжиан (5.17) калибровочно-эквивалентен лагранжиану Эйнштейна с космологическим членом. (Еще раз подчеркнем, что здесь калибровочная эквивалентность используется лишь на классическом уровне. Квантовые поправки индуцируют массовый масштаб, который нарушает конформную симметрию. Последнее одновременно означает и потерю эквивалентности[1].)

Как было отмечено в § 3, для доказательства калибровочной эквивалентности достаточно наложить согласованный набор калибровочных условий. Чтобы

---

[1] Нарушение конформной инвариантности на квантовом уровне связано с появлением ультрафиолетовых расходимостей и, вообще говоря, зависит от используемой регуляризации. В работе [70] была предложена специальная регуляризация, позволяющая в принципе избежать аномалий в локально-конформно-инвариантных теориях. Аномалии могут также отсутствовать вследствие их сокращения в суперсимметричных теориях. — *Прим. перев.*

нарушить инвариантность относительно конформных бустов, мы воспользуемся условием (4.5), тогда как инвариантность относительно дилатаций можно нарушить, приравнивая φ размерной константе. Таким образом, определим "*калибровку Пуанкаре*"

$$b_\mu = 0, \quad \varphi = \kappa^{-1}. \tag{5.19}$$

Первое условие, очевидно, не влияет на лагранжиан. Используя второе условие, мы можем записать (5.17) в виде

$$L = -\frac{(d-2)}{4(d-1)}\kappa^{-2}R(e) + eg\kappa^{2d/(2-d)}. \tag{5.20}$$

Итак, конформно-инвариантное действие (5.17) калибровочно-эквивалентно эйнштейновскому действию с космологическим членом. Выбор знака минус перед кинетическим членом в (5.15) мотивирован желанием получить правильный знак перед скаляром кривизны в выражении (5.20). Константа κ непосредственно связана с ньютоновской гравитационной постоянной, а величина космологической постоянной зависит от еще одной независимой константы взаимодействия g.

Теорию с отличной от нуля космологической постоянной иногда называют деситтеровской теорией гравитации.

Действие (5.20) описывает $\frac{1}{2}d(d-1)$ степеней свободы: конформной гравитации при наличии стандартных связей отвечают $\frac{1}{2}(d+1)(d-2)$ степеней свободы, и еще одна дополнительная степень свободы обеспечивается компенсирующим полем φ. Заметим, что в случае четырех измерений существует конформно-инвариантный лагранжиан, отвечающий полю со спином 2[1], который квадратичен по тензору кривизны:

$$L \sim \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{abcd}R_{\mu\nu}{}^{ab}(M)R_{\rho\sigma}{}^{cd}(M). \tag{5.21}$$

Конформная инвариантность лагранжиана (5.21) обеспечивается выполнением первой связи (4.4). В силу этой связи он квадратичен *по вторым производным*. Используя вторую связь (4.4) [или же исключая $f_\mu{}^a$ с помощью уравнений движения, следующих из (5.21)], можно (с точностью до полной дивергенции) переписать (5.21) в виде

$$L \sim e\left(R^2_{\mu\nu}(e) - \frac{1}{3}R^2(e)\right), \tag{5.22}$$

где $R_{\mu\nu}(e)$ – тензор Риччи, а $R(e)$ – его след.

---

[1] Соответствие между полями и частицами определенного спина здесь снова понимается вне массовой оболочки; лагранжиан (5.21), строго говоря, не описывает физические частицы со спином 2. – *Прим. перев.*

Так же как и в примере из § 3, выбор калибровочного условия есть лишь простой способ демонстрации калибровочной эквивалентности. Мы могли бы обойтись без выбора калибровки, вводя в новое поле репера, являющееся масштабно-инвариантным:

$$e_\mu{}^a = \kappa\varphi^{2/(2-d)}(e_\mu{}^a)^{\text{нов}} . \tag{5.23}$$

После такого переопределения лагранжиан (5.17) в точности совпадает с лагранжианом (5.20), но теперь уже выраженным через новое тетрадное поле. Тот факт, что лагранжиан (5.20) зависит от тетрады, но не от b_μ или φ, есть прямое следствие инвариантности выражения (5.17) относительно конформных бустов и дилатаций.

§ 6. Токи

После того как мы привели некоторые конформно-инвариантные лагранжианы полей материи, рассмотрим теперь (в низшем порядке по константе связи) взаимодействие материи с суперконформными калибровочными полями. В указанном приближении мы разлагаем суперконформные калибровочные поля около их значений в плоском пространстве: $e_\mu{}^a = \delta_\mu{}^a$, а остальные поля равны нулю. Интересуясь лишь сектором гравитационных и спинорных полей суперконформной теории, мы имеем

$$L \approx L_{\text{матер}} + h_\mu{}^a\,\theta_{\mu a} + \omega_\mu{}^{ab}\,S_{\mu ab} + b_\mu T_\mu + f_\mu{}^a\,U_{\mu a} + \overline{\psi}_\mu J_\mu + \overline{\varphi}_\mu J'_\mu , \tag{6.1}$$

где $h_\mu{}^a$ – отклонение поля тетрады от его значения в плоском пространстве. Первый член в выражении (6.1) отвечает лагранжиану полей материи в плоском пространстве. Для простоты мы опустили $SU(N)$-индексы у спинорных полей. Ток, взаимодействующий с тетрадой, называется тензором энергии-импульса; он обозначен через $\theta_{\mu a}$. Токи в выражении (6.1) имеют ряд свойств, следующих из предположения об инвариантности полного действия относительно суперконформных преобразований. Нам достаточно учесть только неоднородные члены в суперконформных законах преобразования гравитационных полей. Отличные от нуля члены таковы:

1) Координатные преобразования: $\delta h_\mu{}^a = -\partial_\mu \xi^a$,

2) Лоренцевы вращения M: $\delta\omega_\mu{}^{ab} = \partial_\mu \varepsilon^{ab}$, $\delta h_\mu{}^a = \varepsilon_\mu{}^a$,

3) Дилатации D: $\delta b_\mu = \partial_\mu \Lambda_D$, $\delta h_\mu{}^a = -\delta_\mu{}^a \Lambda_D$, (6.2)

4) Конформные бусты K: $\delta f_\mu{}^a = \partial_\mu \Lambda_K{}^a$, $\delta\omega_\mu{}^{ab} = \Lambda_K{}^{[a}\delta_\mu{}^{b]}$,

$$\delta b_\mu = \Lambda_{K\mu} ,$$

5) Q-суперсимметрия: $\delta\psi_\mu{}^i = 2\,\partial_\mu \varepsilon^i$,

6) S-суперсимметрия: $\delta\varphi_\mu{}^i = 2\partial_\mu \eta^i$, $\delta\psi_\mu{}^i = -\gamma_\mu \eta^i$.

Рассмотрим теперь вариацию действия, отвечающего лагранжиану (6.1), для любого из приведенных выше преобразований. Не выписывая явно членов, пропорциональных гравитационному полю, мы имеем

$$\delta I = \int dx\ \{\delta\psi(x)\ \frac{\delta I_{\text{матер}}}{\delta\psi(x)} + \delta h_\mu{}^a(x)\,\theta_{\mu a}(x) + \delta\omega_\mu{}^{ab}(x) S_\mu{}^{ab}(x) +$$

$$+ \delta b_\mu(x)\, T_\mu(x) + \delta f_\mu{}^a(x)\, U_{\mu a}(x) + \delta\bar\psi_\mu(x)\, J_\mu(x) + \delta\bar\varphi_\mu(x) J'_\mu(x)\}, \qquad (6.3)$$

где через $\psi(x)$ обозначены все поля материи. Требуя инвариантности полного действия относительно суперконформных преобразований и предполагая, что в отсутствие гравитационных полей поля материи удовлетворяют своим уравнениям поля, мы получаем

$$\int dx\ \{\delta h_\mu{}^a(x)\theta_{\mu a}(x) + \delta\omega_\mu{}^{ab}(x) S_\mu^{ab}(x) + \delta b_\mu(x) T_\mu(x) + \delta f_\mu{}^a(x)\, U_{\mu a}(x) +$$

$$+ \delta\bar\psi_\mu(x) J_\mu(x) + \delta\bar\varphi_\mu(x) J'_\mu(x)\} = 0. \qquad (6.4)$$

Используя явный вид законов преобразования (6.2) с произвольными локальными параметрами, легко вывести следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&1)\ \ \partial_\mu \theta_{\mu\nu} = 0 \quad \text{(общекоординатные преобразования)},\\
&2)\ \ \partial_\mu S_{\mu ab} + 1/2\,(\theta_{ab} - \theta_{ba}) = 0 \quad \text{(лоренцевы вращения)},\\
&3)\ \ \partial_\mu T_\mu + \theta_{\mu\mu} = 0 \quad \text{(дилатации)}, \qquad\qquad (6.5)\\
&4)\ \ \partial_\mu U_\mu{}^a - 2S_\mu{}^{a\mu} - T^a = 0 \quad \text{(конформные бусты)},\\
&5)\ \ \partial_\mu J_\mu = 0 \quad \text{(Q-суперсимметрия)},\\
&6)\ \ \partial_\mu J'_\mu - \gamma_\mu J_\mu = 0 \quad \text{(S-суперсимметрия)}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что не все токи являются сохраняющимися. Но можно определить сохраняющиеся токи, которые будут явно зависеть от координат x^μ. А именно, комбинируя различные уравнения (6.5), мы находим еще четыре сохраняющихся тока:

$$2')\ \ \partial_\mu (S_\mu{}^{ab} + \frac{1}{2}\ (\theta_{\mu b}\, x_a - \theta_{\mu a}\, x_b)) = 0,$$

$$3')\ \ \partial_\mu (T_\mu + \theta_{\mu\nu} x^\nu) = 0,$$

$$4') \quad \partial_\mu \left(U_\mu{}^a - 2S_\mu{}^{ab} x_b - T_\mu x^a + \theta_{\mu b} \left(\frac{1}{2} x^2 \delta^{ab} - x^a x^b \right)\right) = 0,$$

$$6') \quad \partial_\mu (J'_\mu - \gamma_\nu J_\mu x^\nu) = 0.$$

Токи $2'$, $3'$ и $4'$ отвечают преобразованиям в плоском пространстве – лоренцевым вращениям, дилатациям и конформным бустам, определенным следующим образом:

$$2') \quad \varepsilon^{ab}(x) = \varepsilon^{ab}, \quad \xi^\mu(x) = \varepsilon^{\mu\nu} x_\nu,$$

$$3') \quad \Lambda_D(x) = \Lambda_D, \quad \xi^\mu(x) = -x^\mu \Lambda_D,$$

$$4') \quad \Lambda_K{}^a(x) = \Lambda_K{}^a, \quad \varepsilon^{ab}(x) = x^a \Lambda_K{}^b - x^b \Lambda_K{}^a \tag{6.7}$$

$$\Lambda_D(x) = -\Lambda_K{}^a x_a, \quad \xi^\mu(x) = x^\mu x_a \Lambda_K{}^a - \frac{1}{2} x^2 \Lambda_K{}^\mu,$$

где ε^{ab}, Λ_D и $\Lambda_K{}^a$ – постоянные параметры. Как нетрудно убедиться, преобразования (6.7) оставляют инвариантной плоскую метрику ($e_\mu{}^a = \delta_\mu{}^a$). Преобразование, отвечающее току $6'$ в (6.6), есть комбинация Q- и S-преобразований суперсимметрии:

$$6') \quad \eta(x) = \eta, \quad \varepsilon(x) = \gamma^\mu x_\mu \eta. \tag{6.8}$$ 2475

До сих пор мы считали все калибровочные поля в выражении (6.1) независимыми. Учтем теперь связи (4.4); при наличии этих связей независимыми остаются лишь поля $h_\mu{}^a$ и ψ_μ. Следовательно, имеются лишь два тока – модификации токов $\theta_{\mu a}$ и J_μ. Отличие от исходных токов выражается в так называемых "улучшающих" членах, которые возникают из-за зависимости $\omega_\mu{}^{ab}$ и $f_\mu{}^a$ от $h_\mu{}^a$ и φ_μ – от ψ_μ. "Улучшающие" члены являются сохраняющимися, так как в общем случае могут быть записаны в виде дивергенции антисимметричного тензора. Последнее следует из "вихревой" структуры явных решений для $\omega_\mu{}^{ab}$, $f_\mu{}^a$ и φ_μ. "Улучшающие" члены могут быть явно выражены через производные токов $S_\mu{}^{ab}$, $U_{\mu a}$ и J'_μ (заметим, что ток T_μ не является независимым). Повторяя предыдущий анализ, мы заключаем, что поле b_μ не должно входить в интересующую нас теорию. Действительно, ввиду наличия связей (4.4) поле b_μ взаимодействует с токами $S_\mu{}^{ab}$ и $U_\mu{}^a$ соответственно зависимости $\omega_\mu{}^{ab}$ и $f_\mu{}^a$ от b_μ; конформная инвариантность в этом случае означает, что сумма всех членов с b_μ должна равняться нулю. Формально это есть следствие уравнения 4 в формуле (6.5). Остающиеся симмет-

рии приводят к следующим соотношениям для двух модифицированных токов:

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu \theta^{\text{улучш}}_{\mu\nu} = 0 && \text{(общекоординатные преобразования)},\\
&\theta^{\text{улучш}}_{\mu\nu} = \theta^{\text{улучш}}_{\nu\mu} && \text{(преобразования Лоренца)},\\
&\theta^{\text{улучш}}_{\mu\mu} = 0 && \text{(дилатации)}, \qquad (6.9)\\
&\partial_\mu J^{\text{улучш}}_\mu = 0 && (Q\text{-суперсимметрия}),\\
&\gamma_\mu J^{\text{улучш}}_\mu = 0 && (S\text{-суперсимметрия}).
\end{aligned}
$$

При выводе соотношений (6.9) мы неявно предположили, что преобразования (6.2) остались неизменными при наличии стандартных связей. Как нетрудно убедиться, наше предположение действительно выполняется. Таким образом, построение модифицированных токов, удовлетворяющих приведенным выше условиям, оказывается тесно связанным с возможностью наложения стандартных связей.

Нетрудно найти аналоги формул (6.6) для "улучшенных" токов. Мы получаем

$$
\begin{aligned}
&\partial_\mu \left(\frac{1}{2} \left(\theta^{\text{улучш}}_{\mu b}\, x_a - \theta^{\text{улучш}}_{\mu a}\, x_b \right)\right) = 0,\\
&\partial_\mu \left(\theta^{\text{улучш}}_{\mu\nu}\, x^\nu \right) = 0, \qquad (6.10)\\
&\partial_\mu \left(\theta^{\text{улучш}}_{\mu b} \left(\frac{1}{2}\, x^2\, \delta^{ab} - x^a x^b \right)\right) = 0,\\
&\partial_\mu \left(\gamma_\nu J^{\text{улучш}}_\mu\, x^\nu \right) = 0.
\end{aligned}
$$

Данные соотношения приводят к изящным выражениям для токов, связанных с преобразованиями (6.7) и (6.8). Они отличаются от исходных токов (6.6) дополнительными "улучшающими" членами. На этом уровне мы уже можем увидеть связь с обычными определениями этих токов.

Теперь можно также включить в рассмотрение токи, отвечающие киральным $(S)U(N)$-преобразованиям, но"улучшающие" члены для них здесь не имеют важного значения. Напомним, что все эти сохраняющиеся токи выражаются через поля материи, удовлетворяющие своим уравнениям поля, в которых не учитывается взаимодействие с суперконформными калибровочными полями. Нам достаточно рассмотреть системы невзаимодействующих полей материи. В этом случае все токи билинейны по полям. В принципе, каждый из этих токов может быть построен для любой конкретной теории полей материи при условии,

что она инвариантна относительно соответствующих преобразований: трансляций, суперсимметрии и киральных $(S)U(N)$-преобразований. Однако существование подходящих "улучшающих" членов заранее ничем не гарантируется.

Упомянутые выше "улучшенные" токи, очевидно, не образуют суперсимметричного мультиплета. Это следует из "подсчета компонент полей " типа проведенного в § 4; такие рассуждения здесь допустимы, поскольку калибровочные поля и соответствующие им токи отвечают одинаковому числу степеней свободы. Однако в рассматриваемом случае легко найти полный *мультиплет токов* для любой заданной теории. Для получения недостающих компонент мультиплета следует использовать последовательные вариации уже известных токов. Эти вариации повторяются до тех пор, пока мы не придем к производным билинейных комбинаций полей, уже встречавшихся ранее. Благодаря тому, что поля материи удовлетворяют своим уравнениям поля, достаточно исходить из формулировки теории полей материи на массовой оболочке. Тем не менее, получающийся мультиплет токов является супермультиплетом вне массовой оболочки. Он также содержит конечное число компонент: в результате не более чем $4N$ преобразований суперсимметрии мы придем к производным ранее найденных билинейных комбинаций полей, в силу того, что генераторы суперсимметрии являются антикоммутирующими. (Здесь мы предположили, что мультиплет полей материи не имеет центральных зарядов на массовой оболочке. Это условие всегда выполняется для безмассовых мультиплетов.)

При $N > 4$ построение гравитационного мультиплета токов невозможно, так как в этом случае не существует мультиплетов полей материи. (Дело в том, что мультиплеты с $N > 4$ содержат поля со спином $3/2$, а потому должны быть составной частью мультиплета супергравитации). Можно попытаться строить мультиплет токов непосредственно для супергравитации, но в случае самодействующей системы калибровочных полей токи не являются калибровочно-инвариантными. Вследствие этого обычная процедура построения мультиплета приводит к бесконечному числу степеней свободы (компонент), что не позволяет извлечь какую-либо явную информацию. Кроме того, такой результат трудно совместить с предположением о том, что "мультиплет токов" взаимодействует с исходными калибровочными полями, которые, как мы считаем, удовлетворяют своим уравнениям движения. Аналогичные рассуждения справедливы для суперсимметричных теорий Янга – Миллса с $N > 2$, так как при $N > 2$ не существует мультиплетов материи со спинами $s \leqslant 1/2$.

Мы заключаем, что для построения максимального гравитационного мультиплета токов следует рассмотреть ($N = 4$)-суперсимметричную теорию полей материи. Единственный известный кандидат на роль такой теории – суперсимметричная теория Янга – Миллса (для наших целей достаточно ее абелева варианта). Она содержит калибровочное поле V_μ, четыре майорановских спинора ψ^i (киральность ψ^i положительна) и скаляры φ^{ij}, подчиненные $SU(4)$-кова-

риантному условию действительности

$$\varphi^{ij} = (\varphi_{ij})^* = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijkl}\,\varphi_{kl}\,. \tag{6.11}$$

Напряженность поля V_μ обозначается через $F_{\mu\nu}$, и мы будем использовать (анти) самодуальные ее компоненты $F^{\pm} = ½\,(F \pm \widetilde{F})$. Эти поля преобразуются под действием суперсимметрии следующим образом:

$$\begin{aligned}
\delta V_\mu &= \bar{\varepsilon}^i\,\gamma_\mu \psi_i \ + \text{э.с.}, \\
\delta F^{-}_{\mu\nu} &= \bar{\varepsilon}_i\,\hat{\partial}\sigma_{\mu\nu}\psi^i\,, \\
\delta\psi^i &= -\sigma\cdot F^{-}\varepsilon^i - 2i\,\hat{\partial}\,\varphi^{ij}\,\varepsilon_j\,, \\
\delta\varphi_{ij} &= i\,\bar{\varepsilon}_{[i}\,\psi_{j]} - i\,\varepsilon_{ijkl}\,\bar{\varepsilon}^k\psi^l\,.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Действие, инвариантное относительно трансляций, суперсимметрии и киральных $SU(4)$-преобразований, соответствует лагранжиану

$$L = -\frac{1}{4}F^2_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\bar{\psi}_i\,\overleftrightarrow{\hat{\partial}}\,\psi^i - \frac{1}{2}\,\partial_\mu\varphi^{ij}\,\partial_\mu\varphi_{ij}\,. \tag{6.13}$$

Токи, отвечающие трансляциям, суперсимметрии и киральной $SU(4)$-симметрии, могут быть построены обычным образом. Удается также найти "улучшающие" члены, так что эти токи удовлетворяют уравнениям (6.9). Явные выражения для токов с точностью до членов, пропорциональных уравнениям движения, имеют вид

$$\begin{aligned}
\theta_{\mu\nu} &= 2F^{+}_{\mu\rho}F^{-}_{\nu\rho} - \frac{1}{4}\bar{\psi}^i\,\gamma_{(\mu}\partial_{\nu)}\psi_i + \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\,|\,\partial_\rho\varphi^{ij}\,|^2 - \\
&\quad - \partial_\mu\varphi^{ij}\,\partial_\nu\varphi_{ij} - \frac{1}{6}\,(\delta_{\mu\nu}\Box - \partial_\mu\partial_\nu)\,|\,\varphi^{ij}\,|^2, \\
J_{\mu i} &= -\sigma\cdot F^{-}\gamma_\mu\psi_i + 2i\,\varphi_{ij}\,\overleftrightarrow{\partial}_\mu\,\psi^j + \frac{4}{3}\,i\,\sigma_{\mu\lambda}\partial_\lambda(\varphi_{ij}\,\psi^j), \\
V_\mu{}^i{}_j &= \varphi^{ik}\overleftrightarrow{\partial}_\mu\varphi_{kj} + \bar{\psi}^i\,\gamma_\mu\psi_j - \frac{1}{4}\,\delta^i_j\,\bar{\psi}^k\,\gamma_\mu\psi_k
\end{aligned} \tag{6.14}$$

$((\mu\nu) \equiv \mu\nu + \nu\mu, \quad [\mu\nu] \equiv \mu\nu - \nu\mu)$.

Применяя к ним преобразования суперсимметрии (6.12) и учитывая уравнения поля, мы находим полный мультиплет токов. Дополнительные к (6.14) его ком-

поненты таковы:

$$d^{ij}{}_{kl} = \varphi^{ij}\varphi_{kl} - \frac{1}{12}\,\delta^{[i}{}_{k,}\delta^{j]}{}_{l}\,|\varphi_{nm}|^2,$$

$$\chi^{ij}_{k} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{ijmn}(\varphi_{mn}\psi_k + \varphi_{kn}\psi_m),$$

$$t_{ab}{}^{ij} = \bar{\psi}^i\sigma_{ab}\psi^j + 2i\,\varphi^{ij}F^{-}_{ab}, \qquad (6.15)$$

$$e_{ij} = \bar{\psi}_i\,\psi_j,$$

$$\lambda_i = \sigma\cdot F^{-}\psi_i,$$

$$c = (F^{-}_{ab})^2.$$

Этот мультиплет токов играет важную роль при определении состава полей конформной супергравитации с $N = 4$.

§ 7. Конформная супергравитация

Как было установлено в § 4, калибровочная теория, основанная на алгебре $SU(2,2|\,N)$, не приводит к полному набору полей конформной супергравитации при $N > 1$. Поэтому приходится изменить стратегию и выбрать другой исходный пункт для построения конформной супергравитации. Подход, который будет изложен ниже, основан на использовании мультиплета токов. Здесь рассматривается взаимодействие конформной супергравитации с некоторой системой полей материи и используется то обстоятельство, что в первом порядке по суперконформным полям это взаимодействие определяется соответствующим набором токов. Аналогичная ситуация была рассмотрена в предыдущем параграфе. Важный аспект нашего подхода заключается в том, что знание мультиплета токов дает информацию о мультиплете полей, лежащем в основе конформной супергравитации, так как каждый ток должен взаимодействовать с соответствующим калибровочным полем.

Наиболее очевидный кандидат для такого построения есть мультиплет токов суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$. Ввиду того что этот мультиплет содержит тензор энергии-импульса и суперток (с учетом конформных "улучшающих" членов), можно ожидать, что поля, с которыми взаимодействуют эти токи, содержат в качестве подмножества калибровочные поля $SU(2,2|\,N)$-теории, подчиненные связям (4.4). Итак, начнем с того, что сопоставим каждой компоненте мультиплета токов свое калибровочное поле. Помимо гравитона, гравитино и киральных $SU(4)$-калибровочных полей, которые взаимодействуют с сохраняющимися токами, мы таким образом находим комплексный скаляр C, симметричный скаляр E_{ij}, антисимметричный (как по лоренцевым,

так и по $SU(4)$-индексам) тензор $T_{ab}{}^{ij}$, скаляр $D^{ij}{}_{kl}$, отвечающий 20-мерному действительному представлению группы $SU(4)$, и два спинора Λ_i и $\chi^{ij}{}_k$, последний из которых преобразуется по 20-мерному комплексному представлению группы $SU(4)$. Затем следует записать члены взаимодействия в виде $\int d^4x$ (ток) × (поле) и наложить условие инвариантности взаимодействия. Поскольку законы преобразования токов под действием суперсимметрии уже известны, мы сможем найти линеаризованные преобразования для полей. Это позволяет определить линеаризованный мультиплет, на котором преобразования Q-суперсимметрии замкнуты. Полное число степеней свободы в этом мультиплете равно 128 + 128 (мы отдельно указали бозонные и фермионные степени свободы). В том, что это есть минимальный возможный (N = 4)-мультиплет, можно убедиться подсчетом числа степеней свободы вне массовой оболочки. Чтобы реализовать представление для произвольных импульсов, компоненты поля должны соответствовать состояниям *массивного мультиплета* суперсимметрии с $N=4$ (предполагается отсутствие центральных зарядов, что можно считать естественным в рассматриваемой ситуации). Массивные представления классифицируются согласно представлениям группы $USp(8)$, и минимальное из них с максимальным спином 2 содержит 128 + 128 состояний. Структура этого мультиплета и соответствующие суперконформные поля приведены в табл. 3.

В качестве следующего шага мы можем интерпретировать линейные законы преобразования в рамках суперконформной алгебры. Для этого производные, действующие на калибровочные поля, выражаются через зависимые поля $\omega_\mu{}^{ab}$,

Таблица 3

$USp(8)$- и $SU(4)$-разложения массивного супермультиплета с $N = 4$, включающего в себя поля конформной супергравитации с $N = 4$. Индексы у полей поднимаются и опускаются с помощью комплексного сопряжения. Верхние и нижние индексы у спиноров отвечают соответствующим киральным компонентам.

Спин	$USp(8)$	$SU(4)$	Поля
2	1	1	$e_\mu{}^a$
3/2	8	$4 + 4^c$	$\psi_\mu{}^i$, $\psi_{\mu i}$
1	27	$15 + 6 + 6^c$	$V_\mu{}^i{}_j$, $T_{ab}{}^{ij}$, T_{abij}
1/2	48	$20 + 20^c + 4 + 4^c$	$\chi^{ij}{}_k$, $\chi^k{}_{ij}$, Λ^i, Λ_i
0	42	$20 + 10 + 10^c + 1 + 1^c$	D^{ij}_{kl}, E^{ij}, E_{ij}, C, C^*

$f_\mu{}^a$ и $\varphi_\mu{}^i$ или через $SU(2,2|N)$-кривизны, приведенные в табл. 2. В результате мы действительно получаем калибровочные преобразования группы $SU(2,2|N)$ [формула (4.3)], но уже с учетом новых полей и их преобразований. Единственное поле, которое пока отсутствует, есть дилатационное калибровочное поле b_μ, но его легко восстановить, пользуясь формулой (4.3). Появление поля b_μ не влияет на замыкание алгебры, так как одновременно с b_μ мы вводим преобразования относительно конформных бустов. Приведем теперь линеаризованные преобразования полей конформной супергравитации с $N = 4$ относительно Q-суперсимметрии:

$$
\begin{aligned}
\delta C &= \bar{\varepsilon}^i \lambda_i\,,\\
\delta\lambda_i &= 2\hat{\partial} C\varepsilon_i + E_{ij}\,\varepsilon^j + \varepsilon_{ijkl}\,\sigma\cdot T^{kl}\varepsilon^j,\\
\delta E_{ij} &= \bar{\varepsilon}_{(i}\hat{\partial}\lambda_{j)} - \bar{\varepsilon}^k\chi^{mn}{}_{(i}\,\varepsilon_{j)kmn}\,,\\
\delta T_{ab}{}^{ij} &= \bar{\varepsilon}^{[i}R^{j]}{}_{ab}(Q) + \bar{\varepsilon}^k\sigma_{ab}\chi^{ij}{}_k + \frac{1}{2}\varepsilon^{ijkl}\bar{\varepsilon}_k\hat{\partial}\sigma_{ab}\lambda_l\,,\\
\delta\chi^{ij}{}_k &= -\sigma\cdot\hat{\partial}T^{ij}\overleftarrow{\hat{\partial}}\varepsilon_k - \frac{1}{3}\delta^{[i}{}_k\,\sigma\cdot\hat{\partial}T^{j]l}\overleftarrow{\hat{\partial}}\varepsilon_l\,-\\
&\quad-\sigma\cdot R^{[i}{}_k(V)\varepsilon^{j]} - \frac{1}{3}\delta^{[i}{}_k\,\sigma\cdot R^{j]}{}_l(V)\varepsilon^l\,- \qquad\qquad (7.1)\\
&\quad-\frac{1}{2}\varepsilon^{ijlm}\hat{\partial}E_{kl}\varepsilon_m + D^{ij}{}_{kl}\varepsilon^l\,,\\
\delta D^{ij}{}_{kl} &= -2\bar{\varepsilon}^{[i}\hat{\partial}\chi^{j]}{}_{kl} + \delta^{[i}{}_{[k}\bar{\varepsilon}^m\hat{\partial}\chi^{j]}{}_{ml]} + \text{э.с.},\\
\delta e_\mu{}^a &= \bar{\varepsilon}^i\gamma^a\psi_{\mu i} + \text{э. с.},\\
\delta\psi_\mu{}^i &= 2\Big(\partial_\mu\varepsilon^i + \frac{1}{2}b_\mu\varepsilon^i - \frac{1}{2}\sigma\cdot\omega_\mu\varepsilon^i - V_\mu{}^i{}_j\,\varepsilon^j\Big) - \sigma\cdot T^{ij}\gamma_\mu\varepsilon_j\,,\\
\delta V_\mu{}^i{}_j &= \bar{\varepsilon}^i\varphi_{\mu j} + \bar{\varepsilon}^k\gamma_\mu\chi^i{}_{kj} - \frac{1}{4}\delta^i{}_j\bar{\varepsilon}^k\varphi_{\mu k}\,,\\
\delta b_\mu &= \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^i\varphi_{\mu i} + \text{э.с.}
\end{aligned}
$$

Здесь мы пользуемся теми же киральными обозначениями, что и в формуле (4.3). Дополнительные поля преобразуются либо друг в друга, либо в компоненты кривизны. В приведенных соотношениях предполагается, что поля ω, f и φ выражены через остальные поля с помощью соотношений (4.4).

Мы замечаем тесную связь между соотношениями (7.1) и (4.3). Тем не менее результаты оказываются довольно сложными и содержат большое число полей. Были найдены также полные нелинейные законы преобразования, и оказалось, что у них еще более сложная структура. Вывод полных законов преобразования и соответствующей алгебры проводится следующим образом. Сначала нужно приписать всем полям определенные представления киральной $SU(4)$ группы и группы дилатаций. Для нахождения линеаризованных преобразований S-суперсимметрии

следует вычислить коммутатор конформного буста и преобразования Q-суперсимметрии, сделав предположение о структуре K-преобразования, совместимое с дилатационной и $SU(4)$-инвариантностью. В общем случае мы получаем однозначный результат, используя выражения для антикоммутаторов Q и S и двух S-преобразований. Затем мы заменяем производные ковариантными по отношению ко всем линеаризованным преобразованиям, добавляя подходящие калибровочные поля (связности). Нахождение нелинейных выражений и соответствующей калибровочной алгебры производится по индукции: используя линеаризованные результаты, вычисляют коммутатор двух преобразований и находят дополнительные члены в алгебре суперсимметрии. Сначала это делается для калибровочных полей. Чтобы распространить новую алгебру на все поля, в законы преобразования необходимо добавить члены более высокого порядка по полям, которые, в свою очередь, индуцируют члены более высокого порядка в алгебре. Такая итеративная процедура весьма сложна, поскольку множество нелинейных членов оказываются допустимыми даже после наложения условий дилатационной и $SU(4)$-инвариантности, и обычно все допустимые члены действительно появляются.

Имеется, однако, один аспект приведенных выше результатов, который приводит к определенным упрощениям и потому заслуживает специального обсуждения. Если попытаться провести несколько первых итераций по указанной программе, то окажется, что зависимость от скаляра C является неполиноминальной; это допустимо, так как C не преобразуется при дилатациях. Но некоторые из нелинейных членов, зависящие от этого скаляра, обнаруживают удивительно систематическую структуру. Преобразования (7.1), как оказывается, совместимы с *глобальной* киральной $U(1)$-симметрией, а нелинейные Q-преобразования содержат в качестве однородной компоненты именно такое $U(1)$-преобразование с зависящим от полей коэффициентом. Далее, все производные получают добавочный член $C\overleftrightarrow{\partial}_\mu C^*$, который поэтому можно интерпретировать как новую связность, обеспечивающую ковариантность производных относительно *локальных* $U(1)$-преобразований. Другими словами, $C\overleftrightarrow{\partial}_\mu C^*$ играет роль дополнительного калибровочного поля, соответствующего киральным $U(1)$-преобразованиям. Все это можно считать указанием на то, что теория может быть переформулирована в виде, явно инвариантном относительно локальных киральных $U(1)$-преобразований.

При построении такой новой формулировки нужно исходить из того, что задание комплексного скаляра C математически эквивалентно параметризации фактор-пространства $SU(1,1)/U(1)$, где $SU(1,1)$ – группа комплексных 2×2-матриц с единичным детерминантом, которая оставляет инвариантной метрику $\eta = \mathrm{diag}\,(1, -1)$. Вследствие этого элементы группы $SU(1,1)$ удовлетворяют соотношениям

$$U^{-1} = \eta U^{+} \eta, \qquad U \varepsilon U^{T} = \varepsilon, \tag{7.2}$$

где U^T – транспонированная матрица, а ε – двухиндексный символ Леви-Чивиты $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим теперь дублет φ_α и определим

$$\varphi^\alpha = \eta^{\alpha\beta}(\Phi_\beta)^* = (\Phi_2^*, -\Phi_1^*). \tag{7.3}$$

Потребуем также выполнения $SU(1,1)$-инвариантного условия

$$\Phi^\alpha\Phi_\alpha = |\Phi_1|^2 - |\Phi_2|^2 = 1. \tag{7.4}$$

В силу равенства (7.4) поле Φ соответствует трем степеням свободы. Предположим теперь, что Φ преобразуется одновременно относительно глобальных $SU(1,1)$- и локальных $U(1)$-преобразований. Заметим, что при обоих типах преобразований условие (7.4) остается инвариантным. Дополнительная локальная инвариантность позволяет нам устранить еше одну степень свободы выбором калибровки. Например, можно наложить условие действительности

$$\Phi_1 = \Phi^1 \tag{7.5}$$

на одну из компонент поля Φ. В этом случае поле Φ отвечает двум степеням свободы. Следовательно, с точностью до локальных $U(1)$-калибровочных преобразований, поле Φ может быть параметризовано с помошью одной комплексной переменной. Возможная параметризация, совместная с условием (7.5), такова:

$$\Phi_\alpha = (1 - |C|^2)^{-1/2}(1, C), \tag{7.6}$$

где C – комплексное поле. Чтобы доказать, что выражение (7.6) отвечает параметризации фактор-пространства $SU(1,1)/U(1)$, мы заметим, что можно сопоставить полю Φ элемент группы $SU(1,1)$ по формуле

$$U(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi_1 & -\Phi^2 \\ \Phi_2 & \Phi^1 \end{pmatrix}. \tag{7.7}$$

Фазовые преобразования поля Φ в этом случае отвечают умножению справа на элементы группы $U(1)$ – подгруппы группы $SU(1,1)$:

$$U(\Phi) \to U(\Phi)' = U(\Phi)\begin{pmatrix} \exp(-i\lambda) & 0 \\ 0 & \exp(i\lambda) \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Следовательно, все калибровочно-эквивалентные степени свободы, содержашиеся в $U(\Phi)$, распадаются на классы эквивалентности, которые по определению образуют (правое) фактор-пространство $SU(1,1)/U(1)$.

Если принять, что поле C в формуле (7.1) соответствует параметризации $SU(1,1)/U(1)$, то некоторые законы преобразования принимают однозначный вид. С точностью до общего множителя единственное выражение для вариации поля Φ под действием суперсимметрии, которое совместимо с $SU(1,1)$, киральной

$U(1) \times SU(4)$ и дилатационной инвариантностями, таково:

$$\delta\Phi_\alpha = -\bar{\epsilon}^i \Lambda_i \,\epsilon_{\alpha\beta} \Phi^\beta \,. \tag{7.9}$$

Потребовав выполнения калибровочного условия (7.5), можно убедиться, что этот результат действительно согласуется с линеаризованным законом преобразования для C, если поле C определено в соответствии с формулой (7.6). Чтобы преобразования суперсимметрии не нарушали калибровочного условия, их необходимо модифицировать с помошью $U(1)$-преобразования, зависяшего от спинора λ. Этим объясняется отмеченное ранее появление $U(1)$-связности в нелинейных законах преобразования. Калибровочное поле для $U(1)$-преобразований определено лишь с точностью до $U(1)$-инвариантных членов. Одно из определений таково:

$$a_\mu = -\frac{1}{2}\Phi^\alpha \overleftrightarrow{\partial}_\mu \Phi_\alpha - \frac{1}{4}\bar{\Lambda}^i \gamma_\mu \Lambda_i \,, \tag{7.10}$$

т.е. приводит к появлению члена $\frac{1}{2} C^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu C$ в первом порядке разложения по C. Формулировка с явными глобальной $SU(1,1)$- и локальной $U(1)$-инвариантностями обладает важными преимуществами в силу того, что дополнительные симметрии ограничивают вид нелинейных членов, которые могли бы появиться в полных законах преобразования. Подобная стратегия, очевидно, согласуется с центральной темой этих лекций, а именно акцентом на преимущества калибровочно-эквивалентных формулировок с максимально возможной степенью калибровочной инвариантности. Ранее было уже известно, что $SU(1,1)$-инвариантность действительно возникает в супергравитации Пуанкаре с $N = 4$, но связь этой симметрии с суперконформным сектором теории оставалась невыявленной.

§ 8. Супергравитация Пуанкаре с $N = 2$

Мы показали в § 3 и 5, как методом фиксации калибровки построить из теории с большей симметрией теорию с меньшей симметрией. В данном параграфе мы покажем, как этот прием применяется в случае расширенной супергравитации. Нужно исходить из конформной супергравитации, о которой говорилось в § 7, и добавить к ней один или несколько компенсируюших мультиплетов. В результате удается получить лагранжианы расширенной супергравитации Пуанкаре (или де Ситтера). Компенсирующие супермультиплеты, очевидно, должны преобразовываться по представлениям полной нелинейной суперконформной алгебры. Техника построения представлений суперконформной алгебры по представлениям глобальной суперсимметрии была кратко изложена в предыдушем параграфе. Важно понять, что "механизм компенсации" может быть применим для целого ряда неэквивалентных наборов компенсируюших мультиплетов. Выбор различных таких наборов приводит к неэквивалентным формулировкам супергравитации Пуанкаре вне массовой оболочки. Нужно проверять, приводит ли добавление компенсируюших мультиплетов к набору полей, лежащему в основе супергравитации Пуанкаре, и проще всего такую проверку проводить, устанавливая непротиворечивый набор калибровочных условий, нарушающих калибровочные симметрии конформного сектора, т.е. инвариант-

Рис. 1

ность относительно K-, D-, S- и киральных $(S)U(N)$-преобразований. После выбора компенсирующих супермультиплетов необходимо построить соответствующее суперконформно-инвариантное действие. Это действие должно затем сводиться к имеющему смысл действию для супергравитации Пуанкаре (что заранее ничем не гарантируется). Если такого соответствия нет, то необходимо искать возможность введения в теорию добавочных степеней свободы.

Начнем с того, как известные представления полей супергравитации Пуанкаре с $N = 1$ разбиваются на поля конформной супергравитации и поля компенсирующих мультиплетов. Соответствующее разбиение показано на рис. 1. Две минимальные формулировки супергравитации Пуанкаре получаются при использовании кирального и тензорного мультиплетов, каждый из которых содержит $4 + 4$ степеней свободы. В этих случаях мы получаем два неэквивалентных набора полей, содержащих по $12 + 12$ полевых компонент. Неминимальный набор полей супергравитации Пуанкаре основан на $20 + 20$ степенях свободы, которые можно разбить на компоненты, отвечающие конформной супергравитации, и $12 + 12$ компонент компенсирующего комплексного линейного мультиплета.

Аналогичное разбиение для супергравитации с $N = 2$ оказывается более сложным, и мы остановимся на нем несколько подробнее. Схематически оно представлено на рис. 2. Мультиплет конформной супергравитации содержит $24 + 24$ независимых компонент. Соответствующий набор полей, который может быть получен из результатов для случая $N = 4$, приведенных в предыдущем параграфе, включает тетраду $e_\mu{}^a$, гравитино $\psi_\mu{}^i$, киральные $SU(2)$- и $U(1)$-калибровочные поля $V_\mu{}^i{}_j$ и A_μ, дублет спиноров χ^i, антисимметричный тензор T_{ab} и скаляр D. В качестве первого шага необходимо ввести компенсирующий векторный мультиплет с $N = 2$. Этот мультиплет состоит из абелева калибровочного поля $B_\mu{}^{ij}$, антисимметричного по $SU(2)$-индексам, комплексного скалярного поля a, дублета спиноров ζ_i и симметричной матрицы скаляров S_{ij}, на которую наложено условие действительности. Калибровочному полю $B_\mu{}^{ij}$ соответствует модифицированная напряженность, обозначаемая через $t_{ab}{}^{ij}$. Ее явная форма в данном случае для нас не будет важна. Преобразования полей этого

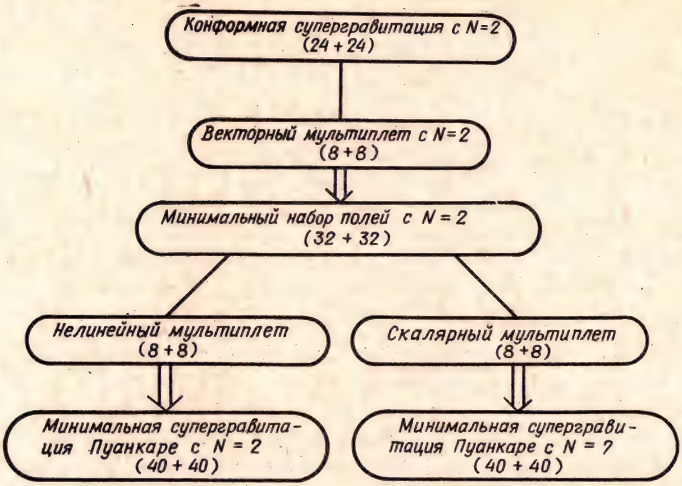


Рис. 2

мультиплета под действием Q- и S-суперсимметрии имеют вид

$$\begin{aligned}
\delta_a &= \bar{\varepsilon}^i \xi_i , \\
\delta\xi_i &= 2\hat{D} a\, \xi_i - 2S_{ij}\varepsilon^j - \frac{1}{2}\sigma\cdot t_{ij}\varepsilon^j + 2a\,\eta_i , \\
\delta S_{ij} &= -\frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_{(i}\hat{D}\xi_{j)} - \frac{1}{2}\varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\bar{\varepsilon}^{(k}\hat{D}\xi^{l)} , \\
\delta B_\mu{}^{ij} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon^{ij}(\varepsilon_{kl}\bar{\varepsilon}^k(\gamma_\mu\xi^l + 2a^*\psi_\mu{}^l) + \text{э. с.}).
\end{aligned} \tag{8.1}$$

Все 32 + 32 степеней свободы мультиплета конформной супергравитации с $N = 2$ и компенсирующего векторного мультиплета образуют так называемый ***минимальный набор полей***. Он минимален в том смысле, что совпадает с наименьшим мультиплетом, который калибровочно-эквивалентен супергравитации Пуанкаре с $N = 2$. Это следует из того, что калибровочные условия Пуанкаре

$$b_\mu = 0, \quad a = \kappa^{-1}, \quad \xi_i = 0 \tag{8.2}$$

нарушают инвариантность относительно конформных бустов, дилатаций, киральной $U(1)$-симметрии и S-суперсимметрии. Как явствует из законов преобразования (8.1), третье условие необходимо для согласованности. Заметим, что условия (8.2) не затрагивают киральные $SU(2)$-преобразования. Размерная константа κ снова связана с ньютоновской гравитационной постоянной, и в дальнейшем мы будем считать ее равной единице.

Калибровочные условия приводят к модификации законов преобразования относительно оставшихся симметрий. Новые законы преобразования можно представить в виде универсальных "правил разбиения", согласно которым суперпреобразования Пуанкаре определяются как линейная комбинация (зависяших от полей) суперконформных преобразований. В § 4 нам уже встречался пример такого разбиения для случая дилатаций [формула (4.6)]. Мы выведем правило разбиения для преобразований суперсимметрии. Условия (8.2) очевидным образом влияют на Q-суперсимметрию, но это влияние можно компенсировать добавлением к преобразованию Q-суперсимметрии зависящего от полей конформного буста, такого, что условие $b_\mu = 0$ останется неизменным. Далее, можно также добавить специальное преобразование S-суперсимметрии, которое позволит сохранить условие $\xi_i = 0$. В результате суперсимметрия *Пуанкаре* может быть представлена в виде комбинации трех суперконформных преобразований:

$$\delta_{\text{Пуанкаре}}(\epsilon_i) = \delta_Q(\epsilon_i) + \delta_S(\eta_i) + \delta_K(\Lambda_K{}^a). \tag{8.3}$$

Параметр K-преобразования $\Lambda_K{}^a$ имеет довольно сложный вид; однако соответствуюший член не играет важной роли, так как большинство полей не преобразуются под действием конформных бустов. Рассмотрим поэтому S-компоненту в выражении (8.3). Для обеспечения инвариантности условия $\xi_i = 0$ на комбинацию Q- и S-суперсимметрий следует наложить ограничение

$$\delta\xi_i = 2\hat{D}a\,\epsilon_i - 2S_{ij}\epsilon^j - \frac{1}{2}\,\sigma\cdot t_{ij}\,\epsilon^j + 2a\,\eta_i = 0. \tag{8.4}$$

Используя формулу (8.1) и раскрывая ковариантную производную в выражении (8.4), находим решение для η_i:

$$\eta_i = \left(S_{ij} + \frac{1}{4}\,\sigma\cdot t_{ij}\right)\epsilon^j - i\hat{A}\,\epsilon_i\,. \tag{8.5}$$

Этот результат убедительно показывает, что супергравитация Пуанкаре сложнее своего конформного аналога. Дело не только в том, что она основана на большем наборе полей, но и в том, что законы суперобразований Пуанкаре имеют более сложную нелинейную структуру, обусловленную наличием дополнительных зависящих от полей слагаемых в правиле разбиения (8.3). Этим же объясняется и то, что построение теории вплоть до самой последней стадии желательно проводить в рамках суперконформного формализма. Лишь в самом конце можно наложить калибровку типа (8.2) и перейти непосредственно к супергравитации Пуанкаре или де Ситтера. Отметим, что после выбора калибровок зависимость от $U(1)$-калибровочного поля A_μ уже не будет универсальной; поскольку второе условие (8.2) нарушает $U(1)$-инвариантность, поле A_μ уже нельзя рассматривать как соответствующее калибровочное поле. Этим, в частности, объясняется то, что A_μ входит в (8.5) явно, а не через ковариантную производную.

Минимальный набор полей обязан своим названием тому обстоятельству, что он образует наименьшее представление, допускающее введенные мультиплеты с центральным зарядом. Дело в том, что векторный мультиплет, входящий в минимальный набор полей, содержит абелево калибровочное поле $B_\mu{}^{ij}$, которому отве-

чает своя калибровочная инвариантность, отличная от калибровочных симметрий суперконформного мультиплета. Генератор этой абелевой калибровочной симметрии возникает в правой части коммутатора двух Q-преобразований

$$[\delta_Q(\epsilon_1),\ \delta_Q(\epsilon_2)] = \ldots + \delta_Z(z), \tag{8.6}$$

где точками обозначены стандартные суперконформные преобразования, а δ_Z – абелево калибровочное преобразование, действующее на поле $B_\mu{}^{ij}$:

$$\delta_Z(z)\, B_\mu{}^{ij} = -\sqrt{2}\epsilon^{ij}\partial_\mu z. \tag{8.7}$$

Параметр этого преобразования z в формуле (8.6) имеет вид

$$z = 2a^* \epsilon_{ij}\bar{\epsilon}_2{}^i \epsilon_1^j + \text{э.с.} \tag{8.8}$$

Указанный дополнительный член не существен при рассмотрении минимального набора полей, так как δ_Z действует только на калибровочную степень свободы, отвечающую полю $B_\mu{}^{ij}$. По этой причине δ_Z коммутирует со всеми калибровочными преобразованиями из суперконформной алгебры и потому представляет собой тривиальный пример преобразования, генерируемого *центральным зарядом*. Существуют, однако, мультиплеты суперсимметрии с $N = 2$, для которых в алгебре имеется центральный заряд, обладающий нетривиальным действием, т.е. переводящий одни компоненты полей в другие. В этом случае параметр преобразования z имеет вид

$$z = 2\epsilon_{ij}\bar{\epsilon}_2^i \epsilon_1^j + \text{э.с.} \tag{8.9}$$

и не зависит от полей. В рамках теории с локальной суперсимметрией центральный заряд должен соответствовать локальному калибровочному преобразованию и поэтому требует введения соответствующего калибровочного поля. Казалось бы, $B_\mu{}^{ij}$ есть наиболее очевидный кандидат, однако в этом случае параметр преобразования, генерируемого центральным зарядом, совпадает с (8.8), а не с (8.9). Следовательно, прежде всего необходимо реализовать на интересующем нас мультиплете локальную алгебру с *зависящим от полей* центральным зарядом (8.8), что может быть сделано с помощью прямой итеративной процедуры. Если затем наложить калибровку Пуанкаре (8.2), в которой a – постоянное поле, то мы вновь придем к выражению (8.9), которое не зависит от полей.

Итак, компенсирующий векторный мультиплет, входящий в минимальный набор полей, играет двоякую роль. С одной стороны, он выступает как компенсирующий мультиплет, обеспечивающий соответствие с супергравитацией Пуанкаре. С другой стороны, он является калибровочным мультиплетом для преобразований центрального заряда и одновременно обеспечивает нужную зависимость от полей преобразования центрального заряда, содержащегося в антикоммутаторе двух Q-преобразований [формула (8.8)]. Эта зависимость оказывается весьма важной при обсуждении центральных зарядов в рамках суперконформного подхода. Преобразования, генерируемые зарядом, должны коммутировать со *всеми* суперконформными симметриями, в частности с дилатациями и киральными

преобразованиями. Хотя левая часть равенства (8.6) не является инвариантной относительно этих преобразований, зависимость от полей в формуле (8.8) такова, что происходит точная компенсация этой неинвариантности.

Поля минимального набора не содержат подходящих степеней свободы, которые компенсировали бы киральную $SU(2)$-инвариантность. В этом можно видеть первое указание на то, что $32 + 32$ степеней свободы недостаточно для описания супергравитации Пуанкаре с $N = 2$. Действительно, если попытаться построить суперконформно-ковариантное действие для компенсирующего векторного мультиплета, то окажется, что оно не годится в качестве действия для супергравитации, так как в калибровке Пуанкаре (8.2) оно содержит член, линейный по полю D (умноженному на детерминант репера). Подобное действие не приводит к согласованным уравнениям движения, и потому приходится ввести дополнительные компенсирующие степени свободы. Пока что были исследованы две возможности (рис. 2), обе приводящие к супергравитации Пуанкаре с $N = 2$, основанной на $40 + 40$ степенях свободы. Обе формулировки приводят к эквивалентным уравнениям движения, но оказываются полностью неэквивалентными вне массовой оболочки. Для получения первого варианта добавляется так называемый нелинейный мультиплет, о котором будет сказано ниже. Второй вариант основан на использовании в качестве компенсирующего набора полей скалярного мультиплета. Наиболее важное различие между двумя формулировками заключено в их поведении относительно преобразований центрального заряда. Нелинейный мультиплет инвариантен относительно этих преобразований, т.е. действие центрального заряда является тривиальным и выражается в виде калибровочного преобразования типа (8.7). Существует также незначительная модификация этого варианта, в рамках которой (8.7) соответствует $SO(2)$-преобразованию и конечным результатом является ($N = 2$)-супергравитация де Ситтера с калибровочной группой $SO(2)$. Что касается скалярного мультиплета, то на нем действие центрального заряда не является тривиальным. После наложения калибровки Пуанкаре это преобразование, строго говоря, уже не соответствует центральному заряду и совпадает с калибровочным преобразованием (8.7) [или $SO(2)$-преобразованием в варианте с калибровочной группой $SO(2)$] лишь на массовой оболочке [1].

За более подробным изложением супергравитации Пуанкаре с $N = 2$ мы отсылаем к литературе. В оставшейся части данного параграфа мы подробнее обсудим роль различных мультиплетов в варианте теории, который содержит нелинейный мультиплет. Начнем с того, что рассмотрим *векторный* ($N = 2$)-*мультиплет*, включающий в себя комплексный скаляр A, дублет майорановских спиноров Ψ_i, триплет действительных скаляров B_{ij} и антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$.

---

[1] Отметим, что в последнее время был построен третий минимальный вариант супергравитации Пуанкаре с $N = 2$, основанный на добавлении к мультиплету конформной супергравитации и векторному мультиплету не скалярного (или нелинейного), а тензорного мультиплета [71]. Последний включает антисимметричный тензор, описывающий частицу со спином 0, и в отсутствие внешних полей соответствует свободному ($N = 2$)-"гипермультиплету". — *Прим. перев.*

Под действием глобальной суперсимметрии мы имеем

$$\begin{aligned}
&\delta A = \bar{\varepsilon}^i \psi_i ,\\
&\delta\psi_i = 2\hat{\partial} A \varepsilon_i + B_{ij}\varepsilon^j + \sigma\cdot F\varepsilon_{ij}\varepsilon^j ,\\
&\delta B_{ij} = \bar{\varepsilon}_{(i}\hat{\partial}\psi_{j)} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\bar{\varepsilon}^k\hat{\partial}\psi^l ,\\
&\delta F_{\mu\nu} = \varepsilon^{ij}\bar{\varepsilon}_i \hat{\partial}\sigma_{\mu\nu}\psi_j + \text{э.с.}
\end{aligned} \tag{8.10}$$

Компоненты B_{ij} и $F_{\mu\nu}$ подчинены связям

$$B^{ij} = (B_{ij})^* = \varepsilon^{ik}\varepsilon^{jl}B_{kl}, \quad \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0, \tag{8.11}$$

так что мультиплету соответствует $8 + 8$ независимых степеней свободы. Второе уравнение есть тождество Бьянки, означающее, что поле $F_{\mu\nu}$ может быть обычным образом выражено через векторный потенциал. Поля A, Ψ_i, B_{ij}, $F_{\mu\nu}$, $-\varepsilon_{ij}\hat{\partial}\Psi^j$, $-2\Box A^*$ преобразуются как компоненты *кирального* ($N = 2$)-*мультиплета*. Стало быть, векторный мультиплет можно интерпретировать как киральный мультиплет, на который наложены связи.

На основе векторного мультиплета можно построить также другой мультиплет, называемый *линейным мультиплетом*[1]. Его компоненты обозначаются через L_{ij}, φ^i, G и E_μ и могут быть выражены через поля векторного мультиплета по формулам

$$\begin{aligned}
&L_{ij} = B_{ij} ,\\
&\varphi^i = \hat{\partial}\Psi^i ,\\
&G = -2\Box A^* ,\\
&E_\mu = \partial_\nu F_{\nu\mu} ,
\end{aligned} \tag{8.12}$$

$$\partial_\mu E_\mu = 0. \tag{8.13}$$

Этот мультиплет, очевидно, тоже основан на $8 + 8$ степенях свободы. Вектор E_μ удовлетворяет связи (8.13), в силу которой он может быть выражен через тензорное калибровочное поле Компоненты в (8.12) в точности соответствуют уравнениям движения для суперсимметричной теории Максвелла с $N = 2$. Вследствие этого максвелловский ток содержится в линейном мультиплете.

Теперь можно повторить приведенные выше рассуждения и построить векторный мультиплет на основе линейного. А именно следует отождествить компоненту G^* с первым полем (скаляром) из векторного мультиплета и найти связь осталь-

---

[1] Другое название этого мультиплета — тензорный мультиплет [23].
Прим. перев.

ных компонент, рассматривая последовательные преобразования суперсимметрии. На этом пути получается бесконечная последовательность векторных и линейных мультиплетов. Однако мы утверждаем, что такое бесконечное чередование невозможно, если векторный и линейный мультиплеты реализованы в рамках суперконформного подхода. Проще всего доказать это, показав, что эти мультиплеты имеют *определенный* вейлевский весовой фактор. Другими словами, полная суперконформная алгебра может быть реализована на этих мультиплетах, лишь если их компоненты определенным образом преобразуются относительно локальных дилатаций. Соответствующие веса таковы, что векторный мультиплет не может быть получен из линейного по указанной выше схеме.

Вейлевский вес w супермультиплета определяется весом его первой компоненты, так что для векторного мультиплета $w = 1$, а для линейного $w = 2$. Иными словами, под действием дилатаций мы имеем

$$
\begin{aligned}
A &\to A' = e^{\Lambda_D} A, \\
L_{ij} &\to L'_{ij} = e^{2\Lambda_D} L_{ij}.
\end{aligned}
\tag{8.14}
$$

Весовые множители остальных компонент можно найти из требования ковариантности законов преобразования суперсимметрии. Генераторы суперсимметрии имеют вес $1/2$, т.е. преобразование суперсимметрии приводит к компонентам с весовым фактором, увеличенным на $1/2$. Следовательно, вейлевские веса для напряженностей векторного и линейного мультиплетов F_{ab} и E_a, отвечающие (8.14), равны соответственно $w = 2$ и $w = 3$.

Векторное и тензорное калибровочные поля, через которые могут быть выражены напряженности,

$$
\begin{aligned}
F_{ab} &= e_a{}^\mu e_b{}^\nu (\partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu), \\
E^a &= \frac{i}{2} e^{-1} e_\mu{}^a \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu E_{\rho\sigma},
\end{aligned}
\tag{8.15}
$$

имеют, следовательно, нулевые веса (напомним, что для поля тетрады $e_\mu{}^a$ вес равен -1). Теперь можно утверждать, что предписания (8.14) являются однозначными, так как калибровочные поля должны оставаться неизменными при локальных масштабных преобразованиях. Причиной последнего свойства является то, что невозможно построить напряженности, подобные фигурирующим в (8.15), которые были бы одновременно ковариантными относительно калибровочных преобразований соответствующих калибровочных полей и относительно локальных масштабных преобразований, если только калибровочные поля не являются инвариантными относительно дилатаций. Если бы вейлевские веса калибровочных полей были отличными от нуля, то пришлось бы ковариантизовать производные в (8.15) по отношению к дилатациям, но при этом произошло бы нарушение калибровочных инвариантностей для V_μ и $E_{\mu\nu}$. Истинная причина этой несовместимости заключается в том, что дилатации и калибровочные преобразования коммутируют, так что калибровочные поля не могут изменяться под действием обоих преобразований.

Рассуждение, основанное на невозможности построения минимального взаимодействия, есть лишь один из многих возможных способов доказательства справедливости формулы (8.14). Например, применяя антикоммутатор $\{Q, S\}$ к полю A, можно найти, что D-преобразование и киральные $U(1)$-преобразования одинаково действуют на A. Однако киральный весовой множитель для A однозначно находится в силу того обстоятельства, что V_μ и B_{ij}, будучи действительными, не преобразуются под действием $U(1)$-преобразований. Аналогично можно найти вейлевский вес поля L_{ij}, сравнивая коэффициенты при $SU(2)$- и D-компонентах в антикоммутаторе $\{Q, S\}$, действующем на L_{ij}. Согласно сказанному выше, тем не менее, имеется возможность определения линейного мультиплета по векторному на основе (8.12), так как поля B_{ij} и L_{ij} ведут себя одинаково под действием дилатаций. Построение же векторного мультиплета по линейному представляется невозможным, если только не использовать нелинейный закон соответствия типа

$$A = G^* L^{-1} - \bar{\varphi}_i \varphi_j L^{ij} L^{-3}, \quad L = (L_{ij} L^{ij})^{1/2}. \tag{8.16}$$

Оказывается, что (8.16) приводит к мультиплету, суперконформные преобразования которого очень похожи на преобразования в случае векторного мультиплета. Однако более детальное исследование показывает, что в действительности (8.16) есть первая компонента "неограниченного" кирального мультиплета, основанного на 16 + 16 степенях свободы. В этом смысле имеется отличие от случая $N=1$, в котором аналогичное построение действительно приводит к векторному мультиплету, построенному по линейному мультиплету.

Таким образом, мы заключаем, что операции с мультиплетами глобальной суперсимметрии не могут быть автоматически обобщены на случай мультиплетов, взаимодействующих с супергравитацией. В частности, не удается построить векторный мультиплет из компонент линейного. Существует, однако, другой мультиплет, на основе которого уже можно построить векторный мультиплет. Это так называемый *нелинейный мультиплет*, о котором сейчас и пойдет речь. Его компонента минимальной размерности может быть записана как 2×2-матрица $\Phi^i{}_\alpha$, принадлежащая группе $SU(2)$:

$$\Phi^i{}_\alpha \Phi^\alpha{}_j = \delta^i{}_j, \quad \Phi^\alpha{}_i \Phi^i{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta, \quad \Phi^\alpha{}_i = \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{ij} \Phi^j{}_\beta. \tag{8.17}$$

Заметим, что матрица $\Phi^i{}_\alpha$ преобразуется относительно киральной группы $SU(2)$, действующей слева. Одновременно она преобразуется под действием (справа) другой группы $SU(2)$ (последней отвечают индексы $\alpha, \beta, \ldots$, и она не имеет отношения к симметриям конформной супергравитации). Ввиду наличия нелинейной связи (8.17) нелинейный мультиплет должен иметь вейлевский вес $w = 0$. Три степени свободы, соответствующие Φ, под действием суперсимметрии должны преобразовываться в $SU(2)$-дублет майорановских спиноров λ_i (λ_i имеет положительную киральность). Это требование оказывается достаточным для опре-

деления всех законов преобразования под действием суперсимметрии:

$$
\begin{aligned}
\delta\Phi^i{}_\alpha &= (2\bar\varepsilon^i\lambda_j - \delta^i_j\,\bar\varepsilon^k\lambda_k - \text{э.с.})\,\Phi^j_\alpha,\\
\delta\lambda^i &= -\frac{1}{2}\,\hat V\varepsilon^i - \frac{1}{2}\,M^{ij}\varepsilon_j + \Phi^i{}_\alpha\,\hat\partial\Phi^\alpha{}_j\,\varepsilon^j -\\
&\quad - 2\lambda^i(\bar\lambda^j\varepsilon_j + \bar\lambda_j\varepsilon^j) + \gamma_a\varepsilon^i(\bar\lambda^j\gamma_a\lambda_j) + 2\sigma_{ab}\varepsilon_j(\bar\lambda^j\sigma_{ab}\lambda^i), \qquad (8.18)\\
\delta M^{ij} &= 4\bar\varepsilon^{[i}(\hat\partial\lambda^{j]} + \Phi^{j]}{}_\alpha\,\hat\partial\Phi^\alpha{}_k\,\lambda^k) - 2\bar\varepsilon^{[i}\hat V\lambda^{j]} - 2(\varepsilon^k\lambda_k)M^{ij},\\
\delta V_a &= 4\bar\varepsilon^i\sigma_{ab}\partial_b\lambda_i + 2\bar\varepsilon_i\gamma_a\Phi^i{}_\alpha\hat\partial\Phi^\alpha{}_j\lambda^j - \bar\varepsilon^i\gamma_a\hat V\lambda_i + \bar\varepsilon^i\gamma_a\lambda^j M_{ij} + \text{э.с.}
\end{aligned}
$$

Мы ввели комплексный антисимметричный скаляр M^{ij} и вектор V_a. Последний удовлетворяет *суперсимметричной* связи

$$\partial\cdot V = \frac{1}{2}V_a^2 + \frac{1}{4}|M^{ij}|^2 - \partial_\mu\Phi^i{}_\alpha\,\partial_\mu\Phi^\alpha{}_i - 2\bar\lambda_i\overleftrightarrow{\hat\partial}\lambda^i, \qquad (8.19)$$

так что нелинейный мультиплет снова включает $8 + 8$ независимых степеней свободы. Хотя степени свободы линейного и нелинейного мультиплетов, таким образом, находятся в тесном соответствии, оба мультиплета, очевидно, являются неэквивалентными при учете взаимодействия с супергравитацией (что следует из различных законов преобразования входящих в них полей относительно дилатаций и киральной группы $SU(2)$). Однако даже в рамках глобальной суперсимметрии, нелинейный мультиплет остается отличным от линейного ввиду нелинейного характера отвечающих ему преобразований. Лишь если эти преобразования линеаризованы, удается установить связь с линейным мультиплетом. Существует также обобщение (8.18) на случай конформной суперсимметрии. При этом оказывается, что λ^i преобразуется неоднородно относительно S-суперсимметрии, а V_a не является инвариантным относительно конформных бустов

$$\delta_S\lambda = \eta, \qquad \delta_K V_a = 2\Lambda_{Ka}. \qquad (8.20)$$

Даже при учете взаимодействия с супергравитацией нелинейный мультиплет продолжает играть роль "прекривизны" для векторного мультиплета. Закон соответствия имеет вид

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{1}{4}\,\varepsilon_{ij}M^{ij},\\
\psi^i &= -2\varepsilon_{ij}\hat\partial\lambda^j - 2\varepsilon_{ij}\Phi^j{}_\alpha\hat\partial\Phi^\alpha{}_k\lambda^k +\\
&\quad + \varepsilon_{ij}\hat V\lambda^j + \frac{1}{2}\lambda_i\varepsilon_{jk}M^{jk}, \qquad (8.21)\\
B_{ij} &= \varepsilon_{ik}V_\mu\Phi^k{}_\alpha\,\partial_\mu\Phi^\alpha{}_j - \varepsilon_{ik}\partial_\mu(\Phi^k{}_\alpha\,\partial_\mu\Phi^\alpha{}_j) +\\
&\quad + \bar\lambda_i\lambda_j\varepsilon_{mn}M^{mn} + \varepsilon_{ik}\varepsilon_{jl}\bar\lambda^k\lambda^l\varepsilon^{mn}M_{mn} + \ldots,\\
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu,
\end{aligned}
$$

причем в B_{ij} мы не указали всех членов, квадратичных по λ.

Теперь мы в состоянии обсудить мультиплетную структуру супергравитации Пуанкаре с $N = 2$ в формулировке, основанной на минимальном наборе полей (т.е. полей конформной супергравитации и компенсирующего векторного мультиплета) с добавлением нелинейного мультиплета. Помимо калибровочного условия Пуанкаре (8.2), следует наложить еше калибровку нарушающую инвариантность относительно киральной группы $SU(2)$. Возможность выбора такой калибровки обеспечивается наличием нелинейного мультиплета

$$\Phi^i{}_\alpha = \delta^i{}_\alpha. \tag{8.22}$$

Так как поля низших размерностей из компенсирующих мультиплетов исключены калибровочными условиями, мультиплетная структура изменяется. Векторный мультиплет превращается в линейный мультиплет с S_{ij} в качестве первой компоненты. Другие компоненты оказываются пропорциональными суперконформным полям. Например, спинорная компонента равна $-\frac{1}{2}\hat{D}\xi^i$, но так как, согласно (8.2), мы имеем $\xi = 0$, то остается лишь член, обеспечивающий ковариантность относительно S-преобразований, а именно $\frac{1}{2}\gamma_\mu\varphi^i{}_\mu$. Аналогичное превращение претерпевает нелинейный мультиплет, который в силу формулы (8.21) теперь можно интерпретировать как векторный мультиплет. Мы заключаем, что суперконформное разбиение полей супергравитации Пуанкаре на мультиплет конформной супергравитации, векторный мультиплет и нелинейный мультиплет в рамках подхода, основанного на суперсимметрии Пуанкаре, выступает, соответственно, как разбиение на мультиплет конформной супергравитации, линейный (тензорный) мультиплет и векторный мультиплет. Кроме того, имеет место еше одна перестройка компонент, связанная с суперсимметричной связью (8.19). При наличии конформной супергравитации эта связь имеет следуюший вид:

$$\begin{aligned} &D_a V_a - \frac{1}{2} V_a^2 - \frac{1}{4} \,|\, M^{ij} |^2 + D_a \Phi^i{}_\alpha D_a \Phi^\alpha{}_i + \\ &+ 2(\bar{\lambda}_i (\hat{D}\lambda^i + \frac{3}{2}\chi^i - \frac{1}{4}\sigma\cdot T^{ij}\lambda_j) + \text{э.с.} = 3D, \end{aligned} \tag{8.23}$$

где D – одно из полей конформной супергравитации. Теперь мы можем исключить D, воспользовавшись (8.23). В результате, вместо того, чтобы приписывать три степени свободы полю V_a и одну – полю D, мы можем рассматривать V_a как независимое векторное поле (на которое не наложено никаких условий). Этим одновременно решается проблема построения лагранжиана супергравитации Пуанкаре с $N = 2$. Как уже было отмечено выше, этот лагранжиан содержит линейный по полю D член, приводяший к противоречивым уравнениям поля в случае, если D рассматривается как независимое поле. В силу формулы (8.23) поле D теперь квадратично по другим полям (с точностью до полной дивергенции), так что имевшаяся раньше проблема не возникает.

§ 9. Замечания по литературе

Обзоры по конформной инвариантности и дальнейшие ссылки могут быть найдены в работах [1 – 7].

Обзоры и весьма полные списки литературы по суперсимметрии, супергравитации и суперпространству приведены в работах [8 – 13], а также в статьях настоящего сборника.

Формулировки теорий супергравитации как калибровочных теорий супералгебры Пуанкаре, супералгебры де Ситтера $OSp(N \mid 4)$ или суперконформной алгебры $SU(2, 2 \mid N)$ рассматривались в работах [14 – 17].

Термин "стандартная связь" был введен в рамках суперпространственного подхода в работах [18, 19].

Обсуждение из § 3 связано с подходом Штюкельберга к описанию массивных полей со спином 1 [20].

Теории конформной супергравитации с $N \leqslant 4$ были построены в работах [21 – 25].

$SU(1,1)$-инвариантность конформной супергравитации с $N = 4$ обсуждалась в работе [25]. В рамках супергравитации Пуанкаре эта инвариантность была открыта в работе [26].

Математическое описание фактор-пространств типа $SU(1,1) / U(1)$ изложено в работе [27].

Суперпространственные формулировки конформной супергравитации изучались в работах [28, 29].

Вывод конформной супергравитации с $N = 1$ в рамках подхода "группового многообразия" был дан в работе [30].

Конформная инвариантность в пространствах произвольного числа измерений обсуждалась в работах [31, 32].

Метод подсчета степеней свободы вне массовой оболочки был предложен в работе [33]. Некоторые приложения этого метода содержатся в работах [23, 34, 35].

Стандартное изложение вопроса о токах и "улучшающих" членах приведено, например, в работах [2, 5, 36, 37].

Преобразования глобальной суперсимметрии (6.8) рассматривались в работе [38].

Мультиплеты токов для различных теорий были построены в работах [39 – 46].

Конформно-инвариантные формулировки супергравитации Пуанкаре с $N = 1$ и различные представления вне массовой оболочки, показанные на рис. 1, обсуждались в работах [47 – 55].

Полное исследование супергравитации с $N = 2$ в рамках суперконформного подхода было проведено в работе [56]. Альтернативные подходы к построению супергравитации Пуанкаре с $N = 2$ были предложены в работах [57, 58].

Обсуждение центральных зарядов в алгебре суперсимметрии может быть найдено в работах [59, 60]. Суперконформные центральные заряды рассматривались в работах [61].

Описание супермультиплетов приведено в лекциях Тейлора в настоящем сборнике (с. 35), а также, например, в работах [62 – 68].

Условие, определяющее линейный мультиплет, заключается в том, что его компонента наинизшей размерности должна преобразовываться по присоединенному представлению группы $SU(N)$, причем ее вариация не должна содержать спиноров в симметричных представлениях группы $SU(N)$. При $N = 4$ этот мультиплет содержит $384 + 384$ степеней свободы со старшим спином, равным 3. Его полное разложение было получено Ховом, Стелле и Таунсендом [44], а также Бергшеффом, Де Руу, де Витом и Рочеком (не опубликовано). Нелинейный мультиплет, вероятно, также может быть построен при $N = 4$. Его компонента с $w = 0$ должна быть элементом группы $SU(4)$.

То обстоятельство, что представления глобальной симметрии не всегда могут быть обобщены на случай взаимодействия с супергравитацией, было впервые отмечено в работе [69]. Обсуждение этого обстоятельства в рамках суперпространственного подхода можно найти в работах [18, 19]. Вопрос об обобщении представлений связан с вопросом, поднятым в § 8, о том, сохраняются ли определенные взаимосвязи между супермультиплетами при учете супергравитации. Нелинейное соотношение такого типа, приведенное в формуле (8.16), рассматривалось в работе [55].

Добавление переводчика

В последнее время появился ряд новых обзоров [72 – 74], посвященных суперконформному подходу. В последней из указанных работ дано описание различных формулировок теорий супергравитации Пуанкаре с $N = 1$ и $N = 2$ и соответствующего взаимодействия с мультиплетами материи в рамках суперконформного тензорного исчисления. Детальное исследование случая супергравитации с $N = 1$ и иллюстрацию преимуществ формулировок с суперконформной инвариантностью можно найти в работах [75 – 77]. В работе [78] на основе суперконформного подхода был построен лагранжиан взаимодействия супергравитации с $N = 2$ с мультиплетами материи. Различные аспекты конформной супергравитации и ее связи с супергравитацией Пуанкаре в рамках суперпространственной формулировки изучались, например, в работах [78 – 81]. Построение конформной супергравитации (установление состава полей, лагранжиана и т.п.) в десяти измерениях было проведено в работе [82] (см. также [83]). Отметим также, что перевод статей [10, 19] можно найти в сборнике [84]. Подробный обзор классических и квантовых аспектов конформной супергравитации дан в работе [85].

Литература

1. *Weyl H.*, Gravitation and Elektrizität, Sitzungsber. K. Preuss, Akad. Wiss., 465 (1918); Reine Infinitesimal Geometrie, Math. Z., **2**, 384 (1918).
2. *Wess J.*, The conformal invariance in quantum field theory. Nuovo Cim., **18**, 1086 (1960).
3. *Kastrup H.A.*, Zur physikalischen Deutung und darstellungstheoretischen Analyse der Konformen Transformationen von Raum und Zeit. Ann. Physik, **9**, 388 (1962).

4. *Fulton T., Rohrlich F., Witten L.*, Conformal invariance in physics. Rev. Mod. Phys., **34**, 442 (1962).
5. *Mack G., Salam A.*, Finite-component field representations of the conformal group. Ann. Phys. (N.Y.), **53**, 174 (1969).
6. *Иванов Е.А., Огиевецкий В.И.* Обратный механизм Хиггса в линейных реализациях. – ТМФ, 1975, т. 25, с. 164.
7. *de Wit B.*, Conformal invariance in gravity and supergravity, In: Proc. 18th Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, 1982, Gordon and Breach Co.
8. *Fayet P., Ferrara S.*, Supersymmetry. Phys. Rep., **32**, 249 (1977).
9. *van Nieuwenhuizen P.*, Lectures in supergravity theory, In: Recent developments in gravitation (Cargése Summer, Inst., 1978), eds. M. Lévy, S. Deser, Plenum, N.Y., 1979, p. 519; Six lectures at the Cambridge Workshop on supergravity, Nuffield Workshop (Cambridge, 1980), eds. S.W.Hawking, M.Roček, Cambridge Univ. Press., 1981, p. 9; Supergravity. Phys. Rep., **68**, 189 (1981).
10. *Scherk J.*, Extended supersymmetry and extended supergravity theories. In: Recent developments in gravitation (Cargése Summer Inst., 1978), eds. M. Lévy, S. Deser, Plenum Press, N.Y. (1979), p. 479.
11. *Zumino B.*, Supergravity and Superspace. In: Recent developments in gravitation (Cargése Summer Inst., 1978), eds. M. Lévy, S. Deser. Plenum Press, N.Y. (1979), p. 405.
12. *Roček M.*, An introduction to superspace and supergravity, In: Superspace and supergravity, Nuffield Workshop (Cambridge, 1980), eds. S.W. Hawking and M. Roček, Cambridge Univ. Press, 1981, p. 71.
13. *Howe P.*, Supergravity in superspace. Nucl. Phys., **B 199**, 309 (1982).
14. *MacDowell S.W., Mansouri F.*, Unified geometric theory of gravity and supergravity. Phys. Rev. Lett., **38**, 739 (1977); 1376 (1977).
15. *Chamseddine A.H., West P.C.*, Supergravity as a gauge theory of supersymmetry Nucl. Phys., **B 129**, 39 (1977).
16. *Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.*, Geometrical interpretation of extended supergravity, Phys. Lett., **B 67**, 439 (1977).
17. *Ferrara S., Kaku M., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.*, Unified field theories with *U*(*N*) internal symmetries; gauging the superconformal group. Nucl. Phys., **B 129**, 125 (1977).
18. *Gates S.J., Siegel W.*, Understanding constraints in superspace formulations of supergravity. Nucl. Phys., **B 163**, 519 (1980).
19. *Gates S.J., Stelle K.S., West P.C.*, Algebraic origins of superspace constraints in supergravity. Nucl. Phys., **B 169**, 347 (1980).
20. *Stueckelberg E.C.G.*, Die Wechselwirkungskräfte in der Electrodynamik und in der Kernkräfte. Helv. Phys. Acta, **11**, 225 (1938).
21. *Kaku M., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.*, Properties of conformal supergravity. Phys. Rev., **D17**, 3179 (1978).
22. *Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.*, Simplifications of conformal supergravity. Phys. Rev., **D19**, 3166 (1979).

23. *de Wit B., van Holten J.W.,* Multiplets of linearized SO(2) supergravity. Nucl. Phys., **B 155**, 530 (1979).
24. *de Wit B., van Holten J.W., van Proeyen A.,* Transformation rules of N = 2 supergravity multiplets. Nucl. Phys., **B 167**, 186 (1980); **B 172**, 543 (1980).
25. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B.,* Extended conformal supergravity. Nucl. Phys., **B 182**, 173 (1981).
26. *Cremmer E., Scherk J., Ferrara S.,* SU(4) invariant supergravity theory. Phys. Lett., **74B**, 61 (1978).
27. *Gilmore R.,* Lie groups, Lie algebras, and some of their applications, Wiley Interscience (1974).
28. *van Nieuwenhuizen P., West P.C.,* From conformal supergravity in ordinary space to its superspace constraints. Nucl. Phys., **B 169**, 501 (1980).
29. *Howe P.,* A superspace approach to extended conformal supergravity. Phys. Lett., **100B**, 389 (1981).
30. *Castellani L., Fré P., van Nieuwenhuizen P.,* A review of the group manifold approach and its applications to conformal supergravity. Ann. Phys. (USA), **136**, 398 (1981).
31. *Capper D., Duff. M.,* Trace anomalies in dimensional regularization. Nuov. Cim., **23A**, 173 (1974).
32. *Englert F., Truffin C., Gastmans R.,* Conformal invariance in quantum gravity. Nucl. Phys., **B 117**, 407 (1976).
33. *de Wit B., Ferrara S.,* On higher-order invariants in extended supergravity. Phys. Lett., **81B**, 317 (1979).
34. *Sohnius M.F., Stelle K.S., West P.C.,* Off-mass-shell formulation of extended supersymmetric gauge theories. Phys. Lett., **92B**, 123 (1980).
35. *Siegel W.,* On-shell O(N) supergravity in superspace. Nucl. Phys., **B 117**, 325 (1981).
36. *Callan C.G., Coleman S., Jackiw R.,* A new improved energy-momentem tensor. Ann. Phys. (USA), **67**, 552 (1971).
37. *Coleman S., Jackiw R.,* Why dilatation generators do not generate dilatations. Ann. Phys. (USA), **67**, 552 (1971).
38. *Wess J., Zumino B.,* Supergauge Transformations in four dimensions. Nucl. Phys., **B 70**, 39 (1974).
39. *Ferrara S., Zumino B.,* Transformation properties of the supercurrent. Nucl. Phys., **B 87**, 207 (1975).
40. *Ogievetsky V., Sokatchev E.,* On a vector superfield generated by the supercurrent. Nucl. Phys., **B 124**, 309 (1977).
41. *Sohnius M.,* The multiplet of currents for N = 2 extended supergravity. Phys. Lett., **81B**, 8 (1978).
42. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B.,* Extended conformal supergravity. Nucl. Phys., **B 182**, 173 (1981).
43. *Howe P., Lindström U.,* The supercurrent in five dimensions. Phys. Lett., **103B**, 422 (1981).

44. *Howe P., Stelle K.S., Townsend P.K.*, Supercurrents. Nucl. Phys., **B 192**, 332 (1981).
45. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B., van Nieuwenhuizen P.*, Ten-dimensional Maxwell – Einstein supergravity, its currents, and the issue of its auxiliary fields. Nucl. Phys., **B195**, 97 (1982).
46. *Bergshoeff E., de Roo M.*, The supercurrent in ten dimensions. Phys. Lett., **112B**, 53 (1982).
47. *Breitenlohner P.*, A geometric interpretation of local supersymmetry. Phys. Lett., **67B**, 49 (1977); Some invariant lagrangians for local supersymmetry. Nucl. Phys., **B 124**, 500 (1977).
48. *Ferrara S., van Nieuwenhuizen P.*, The auxiliary fields of supergravity. Phys. Lett., **74B**, 333 (1978).
49. *Stelle K.S., West P.C.*, Auxiliary fields for supergravity. Phys. Lett., **B 74**, 330 (1978).
50. *Kaku M., Townsend P.K.*, Poincaré supergravity as broken superconformal gravity. Phys. Lett., **76B**, 54 (1978).
51. *Das A., Kaku M., Townsend P.K.*, Unified approach to matter coupling in Weyl and Einstein supergravity. Phys. Rev. Lett., **40**, 1215 (1978).
52. *Ferrara S., Grisaru M., van Nieuwenhuizen P.*, Poincaré and conformal supergravity models with closed algebras. Nucl. Phys., **B 138**, 430 (1978).
53. *Siegel W., Gates S.J.*, Superfield supergravity. Nucl. Phys., **B 147**, 77 (1979).
54. *Sohnius M.F., West P.C.*, An alternative minimal off-shell version of N = 1 supergravity. Phys. Lett., **105B**, 353 (1981).
55. *de Wit B., Roček M.*, Improved tensor multiplets. Phys. Lett., **109B**, 439 (1982).
56. *de Wit B., van Holten J.W., van Proeyen A.*, Structure of N = 2 supergravity. Nucl. Phys., **B 184**, 77 (1981).
57. *Fradkin E.S., Vasiliev M.A.*, Minimal set of auxiliary fields and S-matrix for extended supergravity. Lett. Nuov. Cim., **25**, 79 (1979); Minimal set of auxiliary fields in SO(2) extended supergravity. Phys. Lett., **85B**, 47 (1979).
58. *Breitenlohner P., Sohnius M.F.*, Superfields, auxiliary fields and tensor calculus for N-2 extended supergravity. Nucl. Phys., **B 165**, 483 (1980); An almost simple off-shell version of SU(2) Poincaré supergravity. Nucl. Phys., **B 178**, 151 (1981).
59. *Haag R., Lopuszanski J.T., Sohnius M.F.*, All possible generators of supersymmetries of the S-matrix. Nucl. Phys., **B88**, 257 (1975).
60. *Sohnius M.F., Stelle K.S., West P.C.*, Supersymmetric Yang – Mills theories. In: Proc. Europhysics Study Conf. on Unification of Fundamental Interactions (Erice, 1980), eds. J. Ellis, S. Ferrara, P. van Nieuwenhuizen, Plenum Press, New York 1980, p. 187.
61. *de Wit B., van Holten J.W., van Proeyen A.*, Central charges and conformal supergravity. Phys. Lett., **95B**, 51 (1980).

62. *Salam A., Strathdee J.,* Unitary representations of super-gauge symmetries . Nucl. Phys., **B80**, 499 (1974); SU(6) and supersymmetry. Nucl. Phys., **B84**, 127 (1975).
63. *Nahm W.,* Supersymmetries and their representations. Nucl. Phys., **B135** , 149 (1978).
64. *Taylor J.G.,* On representations of extended supersymmetry algebras on superfields. Nucl. Phys., **B169**, 484 (1980).
65. *Lopuszanski J.T., Wolf M.,* Central charges in the massive supersymmetric quantum theory of scalar-spinor and scalar-spinor-vector fields. Nucl. Phys., **B184**, 133 (1981).
66. *Ferrara S., Savoy C.A., Zumino B.,* General massive multiplets in extended supersymmetry. Phys. Lett., **100B**, 393 (1981).
67. *Rittenberg V., Sokatchev E.,* Decomposition of extended superfields into irreducible representations of supersymmetry. Nucl. Phys., **B193**, 477 (1981).
68. *Siegel W., Gates S.J.,* Superprojectors. Nucl. Phys., **B189**, 295 (1981).
69. Fischler M., Globally supersymmetric multiplets without local extensions. Phys. Rev., **D20**, 1842 (1979).
70*. *Fradkin E.S., Vilkovisky G.A.,* Conformal off-mass-shell extension and elimination of conformal anomalies in quantum gravity. Phys. Lett., **73B**, 209 (1978).
71*. *de Wit B., Philippe R., van Proeyen A.,* The improved tensor multiplet in N = 2 supergravity. Nucl. Phys., **B219**, 143 (1983).
72*. *de Wit B.,* Multiplet calculus. In: Supersymmetry and Supergravity '82, eds. S.Ferrara, J.G.Taylor. P. van Nieuwenhuizen, World Scientific, 1983, p. 85.
73*. *Bergshoeff E.A.,* Conformal invariance in supergravity, Ph. D. thisis, Leiden University, 1983.
74*. *van Proeyen A.,* Superconformal tensor calculus in N=1 and N=2 supergravity. In: Proc. Karpacz Winter School. ed. B.Milewski, World Scientific, 1983; CERN preprint TH-3579 (1983).
75*. *Kugo T., Uehara S.,* Conformal and Poincaré tensor calculi in N = 1 supergravity. Nucl. Phys., **B226**, 49 (1983).
76*. *Kugo T., Uehara S.,* Improved superconformal gauge conditions in N = 1 supergravity Yang-Mills matter system. Nucl. Phys., **B222**, 125 (1983).
77*. *Kugo T., Uehara S.* Superconformal tensor calculus: multiplets with external Lorentz indices and spinor derivative operations, CERN preprint TH 3672 (1983).
78*. *de Wit B., Lauwers P.G., Philippe R., Su S.-Q., van Proeyen A.,* Gauge and matter fields coupled to N = 2 supergravity. Phys. Lett., **135B**, 295 (1984).
79*. *Gates S.J., Grisaru M.T., Roček M., Siegel S.,* Superspace, Benjamin-Cummings, 1983.
80*. *Gates S.J., Jr.,* On-shell and conformal N = 4 supergravity in superspace. Nucl. Phys., **B213**, 409 (1983).

81*. *Gates S.J., Grimm R.*, Consequenсes of conformally covariant constraints for N >4 superspace. Phys. Lett., **B133**, 192 (1983).

82*. *Bergshoeff E., de Roo M., de Wit B.*, Conformal supergravity in ten dimensions. Nucl. Phys., **B217**, 489 (1983).

83*. *de Wit B.*, New results in conformal supergravity. In: Unific. Fundam. Part. Interact. Proc. Europhys. Study Conf., Plenum, New York, 1983, p. 177.

84*. Геометрические идеи в физике: Сб. статей/Под ред. Ю.И.Манина. – М.: Мир, 1983.

85*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Conformal Sypergravity. Phys. Reports (1985).

РАЗМЕРНАЯ РЕДУКЦИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЯ И СКРЫТЫЕ СИММЕТРИИ В РАСШИРЕННОЙ СУПЕРГРАВИТАЦИИ

Е. Креммер*

Идея рассмотрения $(4 + N)$-мерного пространства-времени не нова. Еще в 1921 г. Калуца высказал предположение, что гравитация и электромагнетизм могут быть объединены в рамках 5-мерной теории гравитации. Впоследствии к этой идее не раз возвращались, например, в связи с возможным объединением гравитационного и калибровочных полей или в рамках геометрического подхода к теории Янга – Миллса, использующего теорию расслоений (при этом дополнительные координаты ассоциировались с групповым пространством). Она также развивалась в связи с дуальными моделями, которые оказались непротиворечивыми лишь при определенных значениях размерности пространства-времени ($D = 10$ или $D = 26$ для известных моделей) [14, 45]. Предполагая, что дополнительные координаты образуют компактное пространство (в рассматриваемом случае – N-мерный тор.), можно заключить, что обычная 4-мерная физика есть низкоэнергетическое приближение в более общей теории. Мы будем говорить о соответствующей 4-мерной теории как о полученной размерной редукцией из $(4 + N)$-мерной теории. В данных лекциях нас будут интересовать именно вопросы редукции, а не возможной интерпретации (и существования) дополнительных измерений. Аналогичный подход можно встретить в большинстве работ, посвященных объединению полей гравитации и полей Янга – Миллса, где понятие низкоэнергетического приближения в большинстве случаев подменяется требованием определенных симметрий решений уравнения поля.

Простейшая размерная редукция оказалась весьма эффективным методом исследования суперсимметричных теорий, особенно расширенных суперсимметричных теорий Янга – Миллса и расширенных теорий супергравитации. Путем редукции была установлена связь между супер-янг-миллсовской теорией с $N = 4$ в 4 измерениях и супер-янг-миллсовской теорией с $N = 1$ в 10 измерениях, а также супергравитацией с $N = 8$ в 4 измерениях и супергравитацией с $N = 1$ в 11 измерениях. Кроме того, размерная редукция позволила объяснить происхождение некоторых скрытых симметрий расширенных теорий супергравитации.

---

* *E. Cremmer*, Высшая нормальная школа, Париж, Франция.

Мы начнем (§ 1) с обсуждения размерной редукции в теориях, которые не включают гравитацию, а затем (в § 2) перейдем к гравитационным теориям. В частности, мы рассмотрим 11-мерную супергравитацию и ее редукцию к 4 измерениям. В § 3 мы установим скрытые симметрии супергравитации с $N = 8$ в 4 измерениях, а именно глобальную E_7- и локальную $SU(8)$-инвариантности. Эти скрытые симметрии позволят геометрически интерпретировать скалярные поля. Такая интерпретация возможна для всех расширенных супергравитаций (§ 4). Наконец, в § 5 мы суммируем то, что уже знаем, а также то, что мы хотели бы узнать о супергравитации с $N = 8$ (как на классическом, так и на квантовом уровне). Мы обсудим также возможные следствия отмеченных скрытых симметрий.

§ 1. Размерная редукция негравитационных теорий

С простейшим примером размерной редукции мы сталкиваемся при рассмотрении теории в $(4 + N)$ измерениях, имеющей лагранжиан, инвариантный относительно группы Пуанкаре. Интересным случаем является $(4 + N)$-мерная теория Янга – Миллса, приводящая в результате размерной редукции к 4-мерной теории Янга – Миллса, поля которой специальным образом взаимодействуют с хиггсовскими скалярами. Подобная теория является действительно единой лишь при наличии суперсимметрии, что в свою очередь требует исследования алгебры суперсимметрии в D измерениях. Размерная редукция суперсимметричной теории Янга – Миллса в 10 измерениях приводит к известной суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$ в 4 измерениях.

А. Интерпретация дополнительных измерений

Начнем с обсуждения скалярной теории в $(4 + N)$ измерениях с пуанкаре-инвариантным действием [14]

$$S = \int d^{4+N}x\left[\frac{1}{2}\partial_M\varphi\partial^M\varphi - \frac{1}{2}\mu^2_0\varphi^2 + V(\varphi)\right]. \tag{1.1}$$

Условие плоской метрики $\eta_{NM} = (+ \; - \ldots -)$ не противоречит предположению о том, что "лишние" измерения являются окружностями с длинами $L_1, \ldots, L_N$ т.е. что

$$\varphi(x_\mu, y_i + L_i) = \varphi(x_\mu, y_i), \tag{1.2}$$

где $x_M = (x_\mu, y_i)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Это предположение означает "спонтанное" нарушение пуанкаре-инвариантности *действия*, т.е. нарушение группы P_{4+N} до $P_4 \times [U(1)]^N$. Группа $[U(1)]^N$ приводит к сохранению N "квантовых чисел

массивности". Разложив $\varphi(x_\mu, y_i)$ в ряд Фурье:

$$\varphi(x_\mu, y_i) = (L_1 \ldots L_N)^{-1/2} \sum_{\{n_i\}} \varphi_{\{n_i\}}(x_\mu) \exp(2\pi i \sum_i \frac{y_i n_i}{L_i}), \tag{1.3}$$

где n_i – целые числа, мы имеем в случае действительного φ: $\varphi\{n_i\} = \varphi^*\{-n_i\}$. Интегрируя по y_i, получаем эквивалентное 4-мерное описание этой теории:

$$S = \int d^4x \{ \sum_{\{n_i\}} [\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^*_{\{n_i\}} \partial^\mu \varphi_{\{n_i\}} -$$

$$- \frac{1}{2} m^2_{\{n_i\}} \varphi^*_{\{n_i\}} \varphi_{\{n_i\}} + "V(\varphi_{\{n_i\}}) \prod_i \delta(\sum_\alpha n_i^\alpha)"]\}, \tag{1.4}$$

$$m^2_{\{n_i\}} = \mu_0^2 + 4\pi^2 \sum_i n_i^2 L_i^{-2}, \tag{1.5}$$

где "$\Pi\delta(\Sigma n)$" – символ сохранения N чисел "массивности". Теперь действие S описывает бесконечное число взаимодействующих скалярных частиц.

Ультрафиолетовые расходимости в этой 4-мерной теории остаются такими же, как и в $(4 + N)$ измерениях. Чтобы доказать это, следует воспользоваться свойствами θ-функций Якоби. Что касается инфракрасного поведения, то оно такое же, как и в обычных четырехмерных теориях: дело в том, что одна безмассовая частица в $(4 + N)$ измерениях соответствует снова одной безмассовой частице в 4 измерениях (плюс бесконечное число массивных частиц).

Возможны два предельных случая. Если все $L_i \to \infty$, то мы получаем исходную теорию в $(4 + N)$ измерениях. Если же все $L_i \to 0$, то лишь одна частица сохраняет конечную массу (на классическом уровне). Переход к такому пределу и называется процедурой "*размерной редукции*". Остающееся при таком переходе поле φ описывается "редуцированным действием"

$$S_{(4)} = \int d^4x [\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} \mu_0^2 \varphi^2 + V(\varphi)], \tag{1.6}$$

где константы связи были подходящим образом переопределены (в соответствии с их каноническими размерностями) до перехода к пределу при $L_i \to 0$.

Данный предельный переход эквивалентен выделению лишь одной моды, которая не зависит от y_i, т. е. наложению "условия симметрии"

$$\partial\varphi / \partial y_i = 0.$$

Такое предположение совместно с уравнениями движения в $(4 + N)$ измерениях приводит к уравнениям, следующим из редуцированного действия (которому

отвечает лагранжиан L). Если $\mathfrak{L}$ – лагранжиан $(4 + N)$-мерной теории, то L получается из $\mathfrak{L}$ путем устранения в нем зависимости полей от y_i и подходящих переопределений скалярных полей и констант связи.

Замечания. Мы могли бы исходить из теории поля в искривленном пространстве, например $S \times M^4$, где S – компактное пространство размерности N. Если G – группа симметрии пространства S, то допустимо разложение поля $\varphi(x_\mu, y_i)$ по "G-гармоникам" $Y_N(y_i)$ на S:

$$\varphi(x_\mu, y_i) = \sum_N Y_N(y_i)\varphi_N(x_\mu). \tag{1.7}$$

Поля φ_N описывают скалярные частицы с массами $\mu_0^2 + C(N)/L^2$, где $C(N)$ – собственное значение оператора Лапласа – Бельтрами на S, отвечающего представлению N, а L – некоторая длина, характеризующая S. Если среди значений $C(N)$ имеются равные нулю, то мы можем провести непротиворечивую редукцию, устремив L_i к нулю. Соответствующее выражение для φ:

$$\varphi(x_\mu, y_i) = \sum_{N_0} Y_{N_0}(y_i)\varphi_{N_0}(x_\mu), \quad C(N_0) = 0,$$

таково, что зависимость от y_i частично факторизована. В результате уравнения движения в $(4 + N)$-мерном пространстве приводят к нескольким 4-мерным уравнениям. При этом группу G можно интерпретировать как группу внутренней симметрии. Обычно в качестве S выбирается либо групповое пространство G, либо фактор-пространство G/H ($\dim S = \dim G - \dim H$).

Б. Размерная редукция неабелевой теории Янга – Миллса

Рассмотрим неабелеву теорию Янга – Миллса в $(4 + N)$ измерениях, описываемую действием

$$S = -\frac{1}{4}\int d^{4+N}x\,\mathrm{Tr}(F^2_{MN}), \tag{1.8}$$

где η_{MN} имеет вид $(+ - \ldots)$, а F_{MN} есть калибровочная напряженность,

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + i g_0 [A_M, A_N]. \tag{1.9}$$

Поля A_M и F_{MN} принимают значения в алгебре Ли группы G.

Проведем теперь размерную редукцию, наложив условие

$$\partial A_M / \partial y_i = 0.$$

При этом $4 + N$ компонент полей A_M распадутся на две части: 4-мерный вектор A_μ и N скаляров A_i. Осуществив канонические переопределения полей и констан-

ты связи, мы придем к следующему 4-мерному действию:

$$S_4 = \int d^4x \mathrm{Tr}\{-\frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu A_i)^2 + \frac{1}{4} g^2 [A_i A_j]^2\}, \qquad (1.10)$$

где $D_\mu A_i = \partial_\mu A_i + i g[A_\mu, A_i]$.

Свойства редуцированной теории

1. Она содержит как векторные, так и скалярные частицы (преобразующиеся по присоединенному представлению группы G).

2. Группа глобальной внутренней симметрии есть $O(N)$, а не $U(1)^N$, как было бы в случае, если бы мы учли все (массивные) моды, соответствующие исходной $(4 + N)$-мерной теории. Таким образом, мы имеем нарушение

$$P_{4+N} \to P_4 \otimes O(N). \qquad (1.11)$$

3. В теории имеется фиксированная хиггсовская константа взаимодействия g^2, связанная с калибровочной константой g; потенциал взаимодействия скаляров также имеет весьма специальную структуру.

4. "Пространственноподобным" выбором сигнатуры дополнительных измерений обеспечивается корректный знак кинетического члена скалярных полей A_i.

Важное замечание: представленная выше теория не есть теория нетривиального объединения векторных и скалярных частиц. Дело в том, что здесь отсутствует симметрия, связывающая поля A_μ и A_i и диктующая соотношение между хиггсовской и калибровочной константами взаимодействия (отсутствие такой бозонной симметрии для конечного числа полей следует из теоремы Коулмена и Мандулы). Прямые вычисления на квантовом уровне показывают, что отмеченное выше соотношение между константами, имеющееся в "древесном" лагранжиане, нарушается при учете радиационных поправок. Такой проблемы не возникает, однако, в случае, если мы исходим из суперсимметричных теорий, объединяющих скалярные, векторные и спинорные частицы.

В. Суперсимметрия в D измерениях

Истинно единые теории и менее тривиальные примеры размерной редукции можно получить, если исходить из теории, инвариантной относительно алгебры простой суперсимметрии с $N = 1$ в D измерениях:

$$\{Q_{\hat\alpha}, \bar{Q}_{\hat\beta}\} = 2(\Gamma^M)_{\hat\alpha\hat\beta} P_M, \qquad (1.12)$$

где D матриц Γ^M имеют размер $2^{[D/2]}$ и удовлетворяют соотношению алгеб-

ры Клиффорда

$$\{\Gamma^M, \Gamma^N\} = 2\eta^{MN}. \tag{1.13}$$

Они обладают следующими свойствами:

$$(\Gamma^0)^\dagger = \Gamma^0, \quad (\Gamma^M)^\dagger = -\Gamma^M \text{ при } M \neq 0,$$

$$(\Gamma^M)^\dagger = \Gamma^0\Gamma^M\Gamma^0 \text{ при любом } M.$$

Возможность выбора генераторов $Q_{\hat\alpha}$, удовлетворяющих условиям Майораны, Вейля или Майораны – Вейля, зависит от размерности пространства-времени D [36].

Четная размерность D

1. Поскольку матрицы Γ^M и $(\Gamma^M)^*$ удовлетворяют одному и тому же соотношению алгебры Клиффорда, существует связывающая их матрица B:

$$(\Gamma^M)^* = -B\Gamma^M B^{-1}. \tag{1.14}$$

Мы можем фиксировать выбор фаз так, чтобы выполнялось соотношение $BB^* = \varepsilon I$, где $\varepsilon = \pm 1$. По определению для майорановского спинора выполняется равенство $B^{-1}\psi^* = \psi$ (частица совпадает с античастицей). Следовательно, он существует лишь при $\varepsilon = +1$.

2. Так как матрицы Γ^M и $(\Gamma^M)^T$ тоже принадлежат одной алгебре Клиффорда, существует матрица C (матрица зарядового сопряжения), такая, что

$$(\Gamma^M)^T = -C\Gamma^M C^{-1}. \tag{1.15}$$

Используя свойства эрмитовости и фиксируя фазы, мы получаем

$$B^T = C\Gamma^0, \quad BB^\dagger = I. \tag{1.16}$$

и, следовательно, $B = \varepsilon B^T$, $C = -\varepsilon C^T$.

Определяя $\Gamma^{(n)}$ как антисимметризованное произведение n Γ-матриц, имеем

$$(C\Gamma^{(n)})^T = \varepsilon(-1)^{(n-1)(n-2)/2}C\Gamma^{(n)}. \tag{1.17}$$

Отсюда находим, что число антисимметричных матриц размера $2^{D/2}\times 2^{D/2}$ равно $\frac{1}{2}\, 2^{D/2}\times(2^{D/2}-1)$. Мы находим также, что

$$\varepsilon = -\sqrt{2}\cos\left\{\frac{\pi}{4}(D+1)\right\}, \text{ т.е. } \begin{cases} \varepsilon = +1 \text{ при } D = 2{,}4 \bmod 8, \\ \varepsilon = -1 \text{ при } D = 0{,}6 \bmod 8. \end{cases} \tag{1.18}$$

При $D = 2,4 \bmod 8$ существует "чисто мнимое" представление Γ-матриц. Если выбрать $B = 1$, $C = \Gamma^0$, то майорановский спинор будет просто действительным спинором.

При $D = 0,6 \bmod 8$ мы все же можем определить "майорановские спиноры", если имеется внутренняя симметрия (расширенная суперсимметрия).

Матрица Γ^{D+1}, имеющая единичный квадрат и антикоммутирующая с D матрицами Γ, дается выражением

$$\Gamma^{D+1} = (-1)^{(D-2)/4}\Gamma^0\Gamma^1 \ldots \Gamma^{D-1}. \tag{1.19}$$

По определению вейлевский спинор λ удовлетворяет условию

$$\Gamma^{D+1}\lambda = \pm\lambda. \tag{1.20}$$

Возможность определения майорана-вейлевского спинора имеется лишь в том случае, если Γ^{D+1} – действительная матрица, т.е. при $D = 2 \bmod 8$ (в частности, при $D = 10$).

Нечетная размерность: $D = d + 1$ (d – *четное*)

Алгебру Клиффорда для размерности $d + 1$ можно получить из соответствующей алгебры в d измерениях, добавив к матрицам $\Gamma^M (M = 0, \ldots, d-1)$ матрицу

$$\Gamma^d = i(-1)^{(d-2)/4}\,\Gamma^0\Gamma^1\ldots\Gamma^{d-1} (\equiv i\,\Gamma^{d+1}), \tag{1.21}$$

такую, что $(\Gamma^d)^2 = -1$.

Майорановские спиноры будут существовать в том случае, если матрица Γ^d чисто мнимая, когда чисто мнимы матрицы $\Gamma^0, \ldots, \Gamma^{d-1}$, или, что эквивалентно, если Γ^{d+1} – действительная матрица. Иными словами, майорановские спиноры существуют в $(d + 1)$ измерениях тогда, когда в d измерениях существуют майорана-вейлевские спиноры, т.е. при $D = 3 \bmod 8$.

Замечание. Отмеченные свойства спиноров зависят лишь от сигнатуры пространства времени, равной $s - t$, если метрика имеет вид $(\underbrace{+ + \ldots +}_{s}\underbrace{- - \ldots -}_{t})$.

Размерная редукция. Образующие алгебры Клиффорда в $(4 + N)$ измерениях мы можем всегда записать (с точностью до преобразования подобия) в виде тензорного произведения γ-матриц размера 4×4 и "внутренних" матриц $\tilde{\gamma}$ размера $2^{[N/2]} \times 2^{[N/2]}$, а именно

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu \otimes (I \text{ или } \Omega), \tag{1.22}$$

$$\Gamma^i = (I \text{ или } \gamma^5) \otimes \tilde{\gamma}^i, \tag{1.23}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

Таблица 1

	D								
Спиноры	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Дирака	2	2	4	4	8	8	16	16	32
Майораны	1	–	–	–	–	–	8	8	16
Вейля	1	–	2	–	4	–	8	–	16
Майораны – Вейля	–	–	–	–	–	–	4	–	–

Следовательно, дираковский спинор в $(4 + N)$ измерениях после размерной редукции эквивалентен $2^{[N/2]}$ дираковским спинорам или $2 \times 2^{[N/2]}$ майорановским или вейлевским спинорам в 4 измерениях. Если мы исходим из майорановских, вейлевских или майорана-вейлевских спиноров, то соответствующее число 4-мерных спиноров следует умножить в первом случае на 1/2, во втором – на 1/2 и в третьем – на 1/4. Эти результаты суммированы в табл. 1, где приведено число майорановских или вейлевских спиноров в 4 измерениях, отвечающих определенному типу спинора в D измерениях.

Как следует из табл. 1, майорана-вейлевский спинор в 10 измерениях после редукции к 9 измерениям приводит к четырем 4-компонентным спинорам, несмотря на то что при $D = 9$ не существует майорановских или вейлевских спиноров. Это означает, что в 9 измерениях существует другой тип спиноров ("псевдомайорановский"), число компонент которых равно половине числа компонент дираковского спирона [51].

Г. Суперсимметричная теория Янга – Миллса с $N = 1$ при $D = 10$ и суперсимметричная теория Янга – Миллса с $N = 4$ при $D = 4$

Как следует из табл. 1, максимальная размерность, в которой можно построить суперсимметричную теорию Янга – Миллса (в которой поля имеют спин $s \leqslant 1$), есть $D = 10$. При $D > 10$ размерная редукция к 4 измерениям приводит к полям со спином не менее 3/2, т.е. к суперсимметричной теории с $N > 4$.

Суперсимметричная теория Янга – Миллса с $N = 1$ при $D = 10$ [4, 36].

Калибровочное векторное поле в размерности 10 имеет 8 степеней свободы, т.е. столько же, сколько майорана-вейлевский спинор. Это указывает

на возможность существования суперсимметричной теории Янга – Миллса всего лишь с одним векторным полем и с одним майорана-вейлевским спинорным полем. Такую теорию действительно удается построить. Соответствующее действие имеет вид

$$S = \int d^{10}x \,\mathrm{Tr}\left[-\frac{1}{4} F_{MN}F^{MN} + \frac{i}{2}\bar{\lambda}\Gamma^{M} D_M\lambda \right], \tag{1.24}$$

где

$$F_{MN} = \partial_M A_N - \partial_N A_M + ig_0[A_M, A_N],$$

$$D_M\lambda = \partial_M\lambda + ig_0[A_M, \lambda],$$

а A_M и λ принадлежат алгебре Ли группы G. Матрицы Γ_M имеют размер $32\times\times 32$. Величина λ есть майорана-вейлевский спинор, удовлетворяющий соотношению $\lambda = \Gamma_{11}\lambda$. Действие инвариантно относительно преобразования суперсимметрии

$$\delta A_M = i\bar{\varepsilon}\Gamma_M\lambda, \qquad \delta\lambda = 2F_{MN}\Gamma^{MN}\varepsilon \tag{1.25}$$

с параметром $\varepsilon = \Gamma_{11}\varepsilon$.

Отметим, что *то же самое* действие является суперсимметричным в размерности $D = 6$, если λ – вейлевский спинор, и в размерности $D = 4$, если λ – майорановский спинор.

Суперсимметричная теория Янга – Миллса с $N = 4$ при $D = 4$.

Эта теория получается размерной редукцией из рассмотренной выше теории с $N = 1$, $D = 10$. Определим 6 действительных независимых антисимметричных матриц размера 4×4 $(\alpha^i)_{ab}$ и $(\beta^i)_{ab}$ $(i = 1, 2, 3)$, удовлетворяющих соотношениям для генераторов алгебры $O(4) \sim SU(2)\times SU(2)$:

$$\begin{aligned}
&\{\alpha^i, \alpha^j\} = \{\beta^i, \beta^j\} = -2\delta^{ij},\\
&[\alpha^i, \beta^j] = 0, \quad [\alpha^i, \alpha^j] = -2\varepsilon^{ijk}\alpha^k,\\
&[\beta^i, \beta^j] = -2\varepsilon^{ijk}\beta^k,\\
&\frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}\alpha^i_{cd} = \alpha^i_{ab}, \qquad \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}\beta^i_{cd} = -\beta^i_{ab}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Используя майорановское представление, мы можем записать Γ-матрицы в 10 измерениях в виде

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\otimes\begin{pmatrix} \underset{\sim}{I}_4 & 0 \\ 0 & -I_4 \end{pmatrix}, \quad \mu = 0, \ldots, 3,$$

$$\Gamma^{3+i} = iI_4\otimes\begin{pmatrix} 0 & \beta^3\alpha^i \\ \beta^3\alpha^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma^{6+i} = \gamma_5\otimes\begin{pmatrix} \beta^i & 0 \\ 0 & \beta^3\beta^i\beta^3 \end{pmatrix}, \tag{1.27}$$

так что

$$\Gamma^{11} = I_4 \otimes \begin{pmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (1.28)$$

В этом случае майорана-вейлевский спинор есть

$$\lambda = (\lambda_a, \quad -\beta^3_{ab}\lambda_b), \qquad a,\ b = 1, \dots, 4, \qquad (1.29)$$

где λ_a есть 4-мерный майорановский спинор.

Следуя рассмотренному выше примеру, мы разбиваем 10 компонент векторных полей на 4 + (3 + 3): $A_M \to (A_\mu,\ A_i,\ B_i)$. Совместно с указанным представлением спинорного поля это разбиение приводит к редуцированному действию

$$S_R = \int d^4x\,\mathrm{Tr}\{-\frac{1}{2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(D_\mu A_i)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}(D_\mu B_i)^2 + \frac{i}{2}\bar{\lambda}_a \gamma^\mu D_\mu \lambda_a + \frac{1}{2} g\bar{\lambda}_a[\alpha^i_{ab}A_i +$$

$$+ i\gamma_5 \beta^i_{ab} B_i,\ \lambda_b] + \frac{g^2}{4}([A_i,\ A_j]^2 +$$

$$+ [B_i,\ B_j]^2 + 2[A_i,\ B_j]^2)\}, \qquad (1.30)$$

где A_i – скалярные, а B_i – псевдоскалярные поля. Чтобы найти редуцированный вид преобразований суперсимметрии, следует учесть, что ε = const, т.е. в частности, $\partial\varepsilon/\partial y_i = 0$, и записать

$$\varepsilon = (\varepsilon_a, -\beta^3_{ab}\varepsilon_b).$$

В результате мы получаем четыре преобразования суперсимметрии с параметрами ε_a, оставляющих инвариантным действие S_R:

$$\delta A_\mu = 2i\,\bar{\varepsilon}^a \gamma_\mu \lambda^a,$$

$$\delta A_i = -2\bar{\varepsilon}^a \alpha^i_{ab}\lambda^b, \qquad \delta B_i = 2i\bar{\varepsilon}^a \gamma_5 \beta^i_{ab}\lambda^b,$$

$$\delta\lambda^a = 2F_{\mu\nu}\gamma^{\mu\nu}\varepsilon^a + 4i\,(D_\mu A_i\,\alpha^i_{ab} + \qquad (1.31)$$

$$+ i\,\gamma_5 D_\mu B_i\,\beta^i_{ab})\gamma_\mu\,\varepsilon^b - ig\,(2\varepsilon_{ijk}[A^i,\ A^j]\times$$

$$\times \alpha^k_{ab} + 2\varepsilon_{ijk}[B^i,\ B^j]\beta^k_{ab} - 2i\gamma_5[A^i,\ B^j]\,(\alpha^i\beta^j)_{ab})\varepsilon^b.$$

Как и следовало ожидать, действие инвариантно также относительно глобальных $O(6) \sim SU(4)$-преобразований с параметрами $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$, $\Lambda'_{ji} = -\Lambda'_{ji}$ и $\widetilde{\Lambda}_{ij}$:

$$\delta A_\mu = 0,$$

$$\delta A_i = \Lambda'_{ij} A_j - \widetilde{\Lambda}_{ij} B_j, \qquad \delta B_i = \Lambda_{ij} B_j + \widetilde{\Lambda}_{li} A_l, \tag{1.32}$$

$$\delta\lambda_a = -\frac{1}{4}\left[\varepsilon^{ijk}\beta^k_{ab}\Lambda_{ij} + \varepsilon^{ijk}\alpha^k_{ab}\Lambda'_{ij} + i\gamma_5(\alpha^i\beta^j)_{ab}\widetilde{\Lambda}_{ij}\right]\lambda_b.$$

В обычной формулировке супер-янг-миллсовской теории с $N = 4$, основанной на представлении суперсимметрии с $N = 4$, используются самодуальная и антисамодуальная матрицы скалярных полей, определяемые соотношениями

$$A_{ab} = \alpha^i_{ab} A_i, \qquad B_{ab} = \beta^i_{ab} B_i. \tag{1.33}$$

Ввиду того что мультиплет $(A_\mu, A_i, B_i, \lambda_a)$ соответствует неприводимому представлению суперсимметрии с $N = 4$, здесь мы действительно получаем единую теорию векторных, скалярных и спинорных частиц, все соотношения между константами связи которой однозначно диктуются суперсимметрией с $N = 4$.

Такая теория конформно-инвариантна и обладает замечательными ренормализационными свойствами. Как было показано, соответствующая ей β-функция равна нулю в трехпетлевом приближении, а в однопетлевом приближении существует калибровка, в которой теория конечна [37]. Было высказано предположение, что $\beta = 0$ во всех порядках теории возмущений, т.е. что теория конечна. Последнее может быть связано с тем, что янг-миллсовский ($N = 4$)-супермультиплет является CPT-самосопряженным, а глобальная симметрия есть $SU(4)$, а не $U(4)$[1].

§ 2. Размерная редукция с учетом гравитации

Для 4-мерной интерпретации многомерных теорий, включающих гравитацию (т.е. инвариантных относительно локальных преобразований координат), приходится вводить понятие спонтанной компактификации пространства-времени. Четырехмерные теории, построенные методом размерной редукции, обладают рядом новых черт. Но, как и в случае теорий, не учитывающих гравитационного поля, по-настоящему единые теории получаются лишь при наличии суперсимметрии, т.е. при условии, что исходной многомерной теорией является теория супергравитации (например, в размерности $D = 11$).

---

[1] Работы, посвященные доказательству отсутствия расходимостей в супер-янг-миллсовской теории с $N = 4$, приведены в литературе к лекциям Даффа в настоящем сборнике (с. 177). — *Прим. перев.*

А. Спонтанная компактификация пространства-времени

Начнем с теории гравитации в $4 + N$ измерениях. Для того чтобы можно было дать такой теории 4-мерную интерпретацию, фоновое $(4 + N)$-мерное пространственно-временное многообразие должно быть произведением компактного N-мерного пространства и обычного 4-мерного пространства-времени. Притом это должно следовать из уравнений поля (для метрики g_{MN} и для полей материи). Если уравнения поля действительно допускают соответствующее решение, говорят *о спонтанной компактификации пространства-времени* [14, 15, 18, 40, 43].

В этом случае все поля можно разложить на фоне этого решения, используя "гармонические" функции, отвечающие группе инвариантности G компактного N-мерного пространства. Доказательство стабильности такого решения, вообще говоря, – сложная задача. Если имеется несколько допустимых классических решений, то заранее не ясно, какому из них следует отдать предпочтение, так как понятие энергии в случае компактного пространства не является хорошо определенным. Возможна ситуация, когда различные решения отвечают различным разбиениям $(4 + N)$-мерного пространства на прямое произведение; в этом случае выбор одного из решений может быть сделан на основе граничных условий. Мы могли бы также рассмотреть ситуацию, когда спонтанная компактификация обусловлена квантовыми поправками, но для этого необходимо придать смысл квантовому варианту $(4 + N)$-мерной теории (например, обеспечить ее конечность)[1].

Как было выяснено, такие классические решения действительно существуют. В частности, для теории Эйнштейна – Янга – Миллса было найдено решение, отвечающее плоскому 4-мерному пространству времени и внутреннему пространству в виде сферы S^N. Переходя к пределу при $L \to 0$ (L– "размер" компактного пространства и оставляя лишь поля с конечной (или нулевой) 4-мерной массой мы можем построить непротиворечивую редуцированную теорию, т.е. теорию в 4 измерениях, содержащую конечное число полей. Такая процедура эквивалентна выделению решений, обладающих специфическим свойством симметрии[2].

Простейший вариант размерной редукции – взять внутреннее пространство в виде многомерного тора (произведения окружностей) и устремить размеры тора к нулю. (Такой выбор внутреннего пространства всегда согласован с уравнениями движения и может быть продиктован лишь граничными условиями.) Указанный предельный переход эквивалентен предположению, что поля не зависят от дополнительных координат. Это – обычное предположение

---

[1] "Феноменологические" модели спонтанной компактификации за счет квантовых поправок, в которых квантуются лишь поля материи, а гравитация является классической, рассматривались, например, в работах [55, 56] – *Прим. перев.*

[2] Здесь подразумевается, что условия симметрии накладываются не только на "вакуумные" поля, отвечающие спонтанной компактификации, но и на "полные" поля, т.е. на все флуктуации относительно вакуумных значений. – *Прим. перев.*

размерной редукции: одной степени свободы в $4 + N$ измерениях соответствует одна степень свободы в 4 измерениях. Такое соотношение может не выполняться в случае другого внутреннего пространства, например сферы.

Б. Размерная редукция

Как мы уже видели, решения $(4 + N)$-мерных уравнений движения, удовлетворяющие условию $\partial\varphi/\partial y_i = 0$, соответствуют действию $\int d^4x\sqrt{g(x_\mu)}L(\varphi(x_\mu))$, где L совпадает с $(4 + N)$-лагранжианом $\mathfrak{L}$ с точностью до масштабных преобразований констант связи и полей, необходимых для придания им стандартных размерностей, отвечающих 4-мерной теории. Соответствующие масштабные множители сокращаются после интегрирования по y^i. При этом координатные $(4 + N)$-индексы M следует разбить на 4-мерные координатные индексы и внутренние индексы.

Исходная теория в $4 + N$ измерениях предполагается инвариантной относительно общекоординатных преобразований, имеющих вид

$$\delta x^M = -\xi^M(x),$$

$$\delta\varphi = \xi^M\partial_M\varphi, \tag{2.1}$$

$$\delta A_M = \xi^N\partial_N A_M + \partial_M\xi^N A_N.$$

Четырехмерная теория, к которой приводит размерная редукция, будет инвариантна относительно подкласса преобразований, совместимых с условием $\partial_i\varphi = 0,\quad \partial_i A_N = 0$:

$$\delta\varphi = \xi^\mu\partial_\mu\varphi + (\xi^i\partial_i\varphi \Rightarrow 0),$$

$$\partial_i(\delta\varphi) = 0 \Rightarrow \partial_i\xi^\mu = 0,$$

$$\delta A_\mu = \xi^\nu\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu\xi^\nu A_\nu + \partial_\mu\xi^i A_i + (\xi^i\partial_i A_\mu \to 0),$$

$$\partial_i(\delta A_\mu) = 0 \Rightarrow \partial_j\partial_\mu\xi^i = 0, \tag{2.2}$$

$$\delta A_i = \xi^\nu\partial_\nu A_i + (\partial_i\xi^\nu A_\nu + \xi^j\partial_j A_i \to 0) + \partial_i\xi^j A_j,$$

$$\partial_k(\delta A_i) = 0 \Rightarrow \partial_k\partial_i\xi^j = 0.$$

В результате мы получаем

$$\xi^\mu = \xi^\mu(x_\nu), \qquad \xi^i = a^i_{\ j}x^j + \xi^i(x_\nu), \qquad a^i_{\ j} = \text{const}. \tag{2.3}$$

Масштабные преобразования полей отвечают преобразованиям, при которых сохраняется элемент объема $d^N y$, т.е.при которых $a^i_i = 0$. Таким образом, мы приходим к следующим преобразованиям симметрии в 4-мерном пространстве

$\delta x^\mu = -\xi^\mu(x)$ — репараметризационная инвариантность в 4 измерениях;

$\delta x^i = -\xi^i(x)$ — локальная $U(1)^N$-инвариантность;

$\delta x^i = -a^i_j x^j$ — глобальная $SL(N, R)$-инвариантность.

B. Размерная редукция теории гравитации без материи

1. Разбиение полей и лагранжиан

Применим описанную выше схему редукции к случаю свободного гравитационного поля [6, 7, 12, 13, 47]. Исходным пунктом является действие [4 + N]-мерной теории гравитации в варианте Эйнштейна – Картана (гравитационную постоянную выбираем равной единице)

$$S = -\frac{1}{4}\int d^{4+N}x\,eR(\omega, e). \tag{2.4}$$

Здесь $e = \det e^A_M$, где e^A_M – поле репера, ω_{MAB} – связность, отвечающая локальной группе Лоренца $SO(N+3, 1)$, а R – скаляр кривизны:

$$R(\omega, e) = e^{MA}e^{NB}(\partial_M \omega_{NAB} + \omega_{MAC}\omega^C_{N\,B} - (M \leftrightarrow N)), \tag{2.5}$$

где ω – нераспространяющееся поле, которое не зависит от e. Мы можем решить уравнения поля, соответствующие полю ω, и найти $\omega = \omega(e)$. Теория инвариантна относительно репараметризаций в $(4 + N)$ измерениях и локальных $SO(N+3,1)$-преобразований Лоренца. Выполним теперь размерную редукцию. Записав e^A_M в виде

$$e^A_M = \begin{pmatrix} e^\alpha_\mu & e^a_\mu \\ e^\alpha_m & e^a_m \end{pmatrix},$$

где индексы α отвечают группе $SO(3, 1)$, а индексы a – группе $SO(N)$, мы потребуем, чтобы выполнялось равенство $\partial_i e^A_M = 0$. Кроме того, мы нарушим локальную $SO(3+N, 1)$-инвариантность до группы $SO(3, 1) \times SO(N)$, наложив условие $e^\alpha_m = 0$. Это условие не сказывается на симметриях (следующих из репараметризационной инвариантности), которые были установлены в пре-

дыдущем пункте. В результате имеем

$$\begin{aligned}
\delta e^\alpha_m &= \xi^\mu \partial_\mu e^\alpha_m + a^i_m e^\alpha_i = 0,\\
\delta e^\alpha_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu e^\alpha_\mu + \partial_\mu \xi^\nu e^\alpha_\nu,\\
\delta e^a_m &= \xi^\nu \partial_\nu e^a_m + a^i_m e^a_i,\\
\delta e^a_\mu &= \xi^\nu \partial_\nu e^a_\mu + \partial_\mu \xi^i e^a_i + \partial_\mu \xi^\nu e^a_\nu .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Введем обозначение $B^i_\mu = e_a{}^i e_\mu{}^a \; (e_a{}^i e_j{}^a = \delta_j{}^i)$, тогда

$$\delta B^i_\mu = \xi^\nu \partial_\nu B^i_\mu + \partial_\mu \xi^\nu B^i_\nu + \partial_\mu \xi^i - a_j{}^i B_\mu{}^j . \tag{2.7}$$

Таким образом, имеем: B^i_μ – это N векторных калибровочных полей для группы $U(1)^N$, принадлежащих представлению $\bar{N}$ группы $SL(N, R)$; e^a_m – это N^2 скалярных полей, преобразующихся по представлению N группы $SL(N, R)$ (индекс m) и представлению N группы $SO(N)$ (индекс a); $e_\mu{}^\alpha$ – обычное поле тетрады.

Можно ввести два метрических тензора, инвариантных относительно локальных преобразований группы $SO(3, 1) \times SO(N)$:

$$\begin{aligned}
g_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta}\, e^\alpha_\mu e^\beta_\nu, & \eta_{\alpha\beta} &= (+\ - - - -),\\
g_{ij} &= \eta_{ab}\, e_i{}^a e_j{}^b, & \eta_{ab} &= (- - \ldots - -).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Полный метрический тензор, записанный в форме Калуцы – Клейна, имеет вид

$$g_{MN} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + B^k_\mu g_{kl} B^l_\nu & B^k_\mu g_{ik} \\ B^k_\nu g_{kj} & g_{ij} \end{pmatrix} . \tag{2.9}$$

Для него выполняется соотношение

$$\det g_{MN} = \det g_{\mu\nu} \det g_{ij} \; (\equiv g \cdot \Delta). \tag{2.10}$$

Ввиду $U(1)^N$-калибровочной инвариантности поле B^k_μ может входить в редуцированный лагранжиан лишь в комбинации $G^k_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu{}^k - \partial_\nu B_\mu{}^k$. Самый простой способ получить калибровочно-инвариантные объекты в 4 измерениях – взять

в качестве исходных величин $4+N$ тензоры с "плоскими" индексами, которые являются скалярами относительно репараметризаций. Введя коэффициенты неголономности Ω_{ABC}:

$$[\partial_A, \partial_B] \equiv [e_A^M \partial_M, e_B^N \partial_N] = \Omega_{AB}{}^C \partial_C, \tag{2.11}$$

мы можем записать действие (после интегрирования по частям) в виде

$$S = \frac{1}{16} \int d^{4+N}x\sqrt{g}\,[\Omega^2_{ABC} - 2\Omega_{ABC}\,\Omega^{CAB} - 4\Omega_{CA}{}^A\,\Omega^C_B{}^B]. \tag{2.12}$$

После размерной редукции в $SO(3+N,1)$-калибровке $e_m^\alpha = 0$ отличными от нуля будут лишь коэффициенты $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$, а также

$$\Omega_{\beta\alpha c} = e_{ic}\, e^\mu{}_\alpha\, e^\nu{}_\beta\, G^i_{\mu\nu},$$

$$\Omega_{\alpha bc} = -\Omega_{b\alpha c} = -e^i_b\, e^\mu{}_\alpha \partial_\mu e_{ic}.$$

Поэтому мы легко находим редуцированное действие в 4 измерениях:

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x\sqrt{g}\sqrt{\Delta}\,\{R - \frac{1}{4} g_{ij} G^i{}_{\mu\nu} G^j{}_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} +$$

$$+ \frac{1}{4} g^{\rho\sigma} (g^{ik} g^{je} - g^{ie} g^{jk}) \partial_\rho g_{ik} \partial_\sigma g_{je}\}. \tag{2.13}$$

Путем вейлевского переопределения

$$e_{4\mu}{}^\alpha = e_\mu{}^\alpha \Delta^{1/4}$$

мы можем избавиться от множителя $\sqrt{\Delta} = |\det g_{ij}|^{1/2}$ перед членом с R. В результате

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x\sqrt{g_4}\,\{R_4 - \frac{1}{4} \sqrt{\Delta} g_{ij} g_4^{\mu\rho}\, g_4{}^{\nu\sigma} G^i{}_{\mu\nu} G^i{}_{\rho\sigma} -$$

$$- \frac{1}{8} g_4{}^{\mu\nu} \partial_\mu \ln\Delta\, \partial_\nu \ln\Delta + \frac{1}{4} g_4{}^{\mu\nu} \partial_\mu g_{ij}\, \partial_\nu g^{ij}\}. \tag{2.14}$$

Такое действие описывает один гравитон, N калибровочных векторных полей и $N(N-1)/2$ безмассовых скалярных полей. Оно инвариантно относительно репараметризаций в 4 измерениях, и преобразований локальной группы $U(1)^N$ и глобальной группы $SL(N,R)$, а также локальных групп $SO(N)$ и лоренцевой $SO(3,1)$, тривиально действующих на поля g_{ij} и $g_{\mu\nu}$. В соответствии с тем, что говорилось ранее, полученная теория не является единой теорией скалярных, векторных и тензорных частиц, так как в ней отсутствует симметрия, связывающая

поля $g_{\mu\nu}$, g_{ij} и $B_\mu{}^i$. Отметим, что группу инвариантности $SL(N, R)$ можно обобщить до $GL(N, R)$ путем включения следующих масштабных преобразований, сохраняющих вид действия:

$$g_{ij} \to \lambda g_{ij}, \qquad (\Delta \to \lambda^N \Delta), \qquad B_\mu^i \to \lambda^{-(N+2)/4} B_\mu^i. \tag{2.15}$$

2. Структура скалярного сектора

Введем матрицу $\bar{g}_{ij}$, такую, что $\det \bar{g}_{ij} = 1$, т.е. $g_{ij} = \bar{g}_{ij}\Delta^{1/N}$. Тогда мы можем записать часть действия, описывающую взаимодействие скалярных полей (и их взаимодействие с гравитационным полем) в виде

$$S_s = \frac{1}{16}\int d^4x \sqrt{g_4}\, g_4^{\mu\nu}\left[\left(\frac{N+2}{2N}\right)\partial_\mu \ln\Delta\, \partial_\nu \ln\Delta - \partial_\mu \bar{g}_{ij}\partial_\nu \bar{g}^{ij}\right]. \tag{2.16}$$

Симметричную матрицу $\bar{g}_{ij}$, имеющую единичный детерминант, можно считать, элементом фактор-пространства $SL(N, R)/SO(N)$. В этом можно убедиться, введя репер $\bar{e}_i{}^a$, так что

$$\bar{g}_{ij} = \bar{e}_i{}^a \eta_{ab} \bar{e}_j{}^b. \tag{2.17}$$

Матрица $\bar{e}_i{}^a$ является элементом группы $SL(N, R)$, определенным с точностью до локального $SO(N)$-преобразования. Временно отвлекаясь от локальной $SO(N)$-симметрии, нетрудно написать $SL(N, R)$-инвариантный лагранжиан для $\bar{e}_i{}^a$:

$$L \sim -\partial_\mu \bar{e}_i{}^a \partial^\mu \bar{e}^i{}_a \sim \mathrm{Tr}[(\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e})^2].$$

Здесь $\bar{e}^i{}_a$ – матрица, обратная матрице $\bar{e}_i{}^a$, а $\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e}$ – элемент алгебры Ли группы $SL(N, R)$. Этот лагранжиан в действительности инвариантен относительно группы $SL(N, R) \times SL(N, R)$. Так как группа $SL(N, R)$ не является компактной, $\mathrm{Tr}[(\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e})^2]$ содержит как положительные, так и отрицательные члены, т.е. не есть положительно определенная величина. Неположительность можно устранить обычным способом, а именно введением локальной калибровочной инвариантности, в данном случае относительно группы $SO(N)$. Соответствующий калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид

$$L \sim \mathrm{Tr}[(\bar{e}^{-1}D_\mu \bar{e})^2], \tag{2.18}$$

где $D_\mu \bar{e}_i{}^a = \partial_\mu \bar{e}_i{}^a - \bar{e}_i{}^b \Omega_{\mu a}{}^b$, а $\Omega_{\mu a}{}^b$ – калибровочное поле, отвечающее локальной $SO(N)$-инвариантности, т.е. принадлежащее алгебре Ли $SO(N)$ (и вследствие этого антисимметричное по a и b). Мы, однако, не вводим кинетические члены для поля Ω_μ, которое, таким образом, входит в лагранжиан в ви-

де квадратичной комбинации

$$L \sim \mathrm{Tr}[(\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e} - \Omega_\mu)^2]. \tag{2.19}$$

Это позволяет исключить Ω_μ с помощью уравнений движения. Разбив $\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e}$ на две части – "параллельную" и "перпендикулярную" по отношению к киллинговой метрике $SO(N)$, т.е. антисимметричную и симметричную по индексам a и b:

$$\bar{e}_a{}^i \partial_\mu \bar{e}_i{}^b = (\bar{e}_a{}^i \partial_\mu \bar{e}_i{}^b)_{\parallel} + (\bar{e}_a{}^i \partial_\mu \bar{e}_i{}^b)_{\perp}, \tag{2.20}$$

мы можем записать решение для Ω_μ в виде

$$\Omega_{\mu a}{}^b = (\bar{e}_a{}^i \partial_\mu \bar{e}_i{}^b)_{\parallel} = \frac{1}{2}(\bar{e}_a{}^i \partial_\mu \bar{e}_i{}^b - a \leftrightarrow b). \tag{2.21}$$

Подставив это выражение в лагранжиан, получим

$$L \sim \mathrm{Tr}[(\bar{e}^{-1}\partial_\mu \bar{e})^2_{\perp}]. \tag{2.22}$$

Поскольку $SO(N)$ есть максимальная компактная подгруппа группы $SL(N, R)$, лагранжиан L теперь оказывается положительно определенным. Хотя Ω_μ уже отсутствует, лагранжиан по-прежнему является калибровочно-инвариантным. Полная группа инвариантности дается преобразованиями

$$\bar{e}_j{}^a \to S_i{}^j \bar{e}_j{}^b O_b{}^a(x), \tag{2.23}$$

где $S_i{}^j$ – постоянная матрица из группы $SL(N, R)$, а $O_b{}^a(x)$ – локальная матрица из группы $SO(N)$. Нетрудно убедиться, этот лагранжиан действительно есть функция калибровочно-инвариантной величины $\bar{g}_{ij}$ и может быть приведен к виду

$$L \sim -\mathrm{Tr}(\partial_\mu \bar{g} \partial^\mu \bar{g}^{-1}). \tag{2.24}$$

Если записать $\bar{e}$ как $\exp w$, где w – элемент алгебры Ли $SL(N, R)$, то группы $SL(N, R)$ и $SO(N)$ будут действовать на w нелинейно. Максимальная подгруппа их произведения, которая действует на w линейно изоморфна группе $SO(N)$:

$$\bar{e} \to O\bar{e}O^{-1}.$$

Рассмотренная теория есть частный случай так называемой G/H-сигма-модели, в которой скалярные поля принимают значения в фактор-пространстве G/H; например, CP^{N-1}-моделям отвечают $G = SU(N)$ и $H = U(N-1)$. Можно рассматри-

вать модели с некомпактной группой G, выбирая в качестве H максимальную компактную подгруппу. Хотя введение калибровочной H-инвариантности может показаться искусственным, соответствующий N-реперный формализм необходим при учете взаимодействия с фермионами. Кроме того, как следует из свойств 2-мерной CP^{N-1}-модели, эта локальная симметрия может стать динамической на квантовом уровне.

Г. Размерная редукция полей материи в гравитационном поле

Рассмотрим теперь скалярные и векторные поля материи в $4+N$ измерениях, взаимодействующие с гравитационным полем. При размерной редукции векторного поля мы столкнемся с рядом специфических особенностей, которые характерны также для более сложного случая размерной редукции 11-мерной супергравитации.

1. Скалярное поле

Рассмотрим действие скалярного поля

$$S_s = \int d^{4+N}x\sqrt{g}g^{MN}\partial_M\varphi\,\partial_N\varphi\,. \qquad (2.25)$$

Предполагая, как и ранее, что $\partial_i\,\varphi = 0$, и используя разбиение g_{MN}, находим (учитывая сделанные выше вейлевские масштабные преобразования)

$$S_s^{(4)} = \int d^4x\sqrt{g_4}\;g_4^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi\,. \qquad (2.26)$$

2. Векторное поле

Для простоты мы рассмотрим лишь случай абелевого калибровочного поля, описываемого действием

$$S_V = \int d^{4+N}x\sqrt{g}\,g^{MN}g^{PQ}F_{MP}F_{NQ}, \qquad (2.27)$$

инвариантным относительно следующего преобразования поля A_M (совместно с соответствующим преобразованием g_{MN}):

$$\delta A_M = \xi^N\partial_N A_M + \partial_M\xi^N A_N + \partial_M\Lambda. \qquad (2.28)$$

После размерной редукции (при условии $\partial_i\Lambda = 0$) находим

$$\delta A_\mu = \xi^\nu\partial_\nu A_\mu + \partial_\mu\xi^\nu A_\nu + \partial_\mu\xi^i A_i + \partial_\mu\Lambda,$$

$$\delta A_i = \xi^\nu\partial_\nu A_i + a_i{}^j A_j\,. \qquad (2.29)$$

Как уже отмечалось выше, поле A_μ преобразуется не только под действием "собственной" калибровочной группы (с параметром Λ), но также и под действием группы $U(1)^N$, отвечающей векторным полям $B_\mu{}^i$. Но можно ввести новое векторное поле A'_μ, которое будет инвариантным относительно калибровочной группы $U(1)^N$. Для этого воспользуемся общим методом, а именно выберем в качестве исходной величины в $4+N$ измерениях тензор с "плоскими" индексами, в данном случае

$$A_A = e_A{}^M A_M, \tag{2.30}$$

и выполним его редукцию к 4 измерениям. В результате получим

$$\begin{aligned} A_\alpha &= e_\alpha{}^\mu A_\mu + e^i{}_\alpha A_i = e_\alpha{}^\mu (A_\mu - B^i_\mu A_i) = e_\alpha{}^\mu A'_\mu, \\ A_a &= e_a{}^i A_i + (e^\mu{}_a A_\mu = 0) = e_a{}^i A_i. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Редукция действия осуществляется с использованием "плоского" тензора

$$F_{AB} = e_A{}^M e_B{}^N F_{MN} = e_A{}^M \partial_M A_B - e_B{}^M \partial_M A_A - \Omega_{AB}{}^C A_C, \tag{2.32}$$

для которого находим

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu (\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu + G^i_{\mu\nu} A_i), \\ F_{\alpha a} &= e_a{}^i e_\alpha{}^\mu \partial_\mu A_i, \\ F_{ab} &= 0. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Четырехмерное действие, полученное после вейлевского переопределения метрики, при котором $\sqrt{g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}$ остается инвариантным, имеет вид

$$S_V^{(4)} = \int d^4x \sqrt{g_4} [\sqrt{\Delta} g_4^{\mu\rho} g_4^{\nu\sigma} (F'_{\mu\nu} + C^i_{\mu\nu} A_i)(F'_{\rho\sigma} + G^j_{\rho\sigma} A_j) + g_4^{\mu\nu} g^{ij} \partial_\mu A_i \partial_\nu A_j]. \tag{2.34}$$

Как и раньше, $SL(N, R)$-инвариантность можно расширить до $GL(N, R)$, добавив к указанным выше масштабным преобразованиям переопределение

$$A'_\mu \to \lambda^{-N/4} A'_\mu, \qquad A_i \to \lambda^{1/2} A_i. \tag{2.35}$$

Д. Супергравитация в 11 измерениях [20]

Как уже было сказано, максимальная размерность, в которой суперсимметричная теория приводит к редуцированной 4-мерной теории с $N \leqslant 8$, есть $D = 11$. Иными словами, супергравитация в 11 измерениях должна соответствовать максимальной супергравитации с $N = 8$ в 4-мерном пространстве. Без-

массовые состояния на массовой оболочке в D измерениях классифицируются по представлениям группы $O(D-2)$. Гравитон, отвечающий матрице g_{MN}, имеет $(1/2)(D-2)(D-1)-1$ степеней свободы, т.е. 44 в 11 измерениях. Гравитино ψ_M, удовлетворяющему условию Майорана, отвечает $(1/2)\cdot 2^{[D/2]}\times$ $\times(D-3)$ степеней свободы, т.е. 128 в 11 измерениях. Следовательно, для равенства нулю полного числа степеней свободы недостает 84 бозонных степеней свободы. Это число совпадает с размерностью антисимметричного представления A_{ijk} группы $O(9)$. Мы можем сопоставить ему ковариантный тензор A_{MNP}, преобразующийся при калибровочных преобразованиях по закону

$$\delta A_{MNP}=3\partial_{[M}\rho_{NP]},\qquad \rho_{NP}=-\rho_{PN}. \tag{2.36}$$

Если подобная гипотеза верна, то в теорию входят лишь калибровочные поля и ее построение должно быть относительно простой задачей. Так в действительности и оказывается, т.е. искомое суперсимметричное действие зависит от трех полей $e_M{}^A$, ψ_M и A_{MNP}. Ввиду калибровочной инвариантности поле A_{MNP} входит в лагранжиан (исключая член самодействия) в виде калибровочной напряженности $F_{MNPQ}=4\partial_{[M}A_{NPQ]}$. Действие теории имеет вид

$$\begin{aligned}S=\int d^{11}x\Big\{&-\frac{e}{4}R(e,\omega)-\frac{ie}{2}\bar\psi_M\Gamma^{MNP}D_N\Big(\frac{\omega+\hat\omega}{2}\Big)\psi_P-\\&-\frac{e}{48}F_{MNPQ}F^{MNPQ}+\frac{2}{(144)^2}\varepsilon^{M_1\ldots M_{11}}F_{M_1\ldots M_4}F_{M_5\ldots M_8}A_{M_9M_{10}M_{11}}+\\&+\frac{e}{192}(\bar\psi_R\Gamma^{RSMNPQ}\psi_S+12\bar\psi^M\Gamma^{PQ}\psi^N)(F_{MNPQ}+\hat F_{MNPQ})\Big\},\end{aligned} \tag{2.37}$$

где

$$\omega_{MAB}=\hat\omega_{MAB}-\frac{i}{4}\bar\psi_P\Gamma_{MAB}{}^{PQ}\psi_Q,$$

$$\hat\omega_{MAB}=\omega^{(0)}_{MAB}(e)+\frac{i}{2}(\bar\psi_M\Gamma_B\psi_A-\bar\psi_M\Gamma_A\psi_B+\bar\psi_B\Gamma_M\psi_A),$$

$$\hat F_{MNPQ}=F_{MNPQ}-3\bar\psi_{[M}\Gamma_{NP}\psi_{Q]}.$$

В рамках формализма первого порядка ω можно рассматривать как независимое поле, зависимость которого от e и ψ имеет место лишь на уравнениях поля. Член с εFFA является калибровочно-инвариантным с точностью до полной производной. Действие инвариантно относительно следующих преобразований суперсимметрии:

$$\delta e_M{}^A=-i\bar\varepsilon\Gamma^A\psi_M,$$

$$\delta A_{MNP}=\frac{3}{2}\bar\varepsilon\Gamma_{[MN}\psi_{P]}, \tag{2.38}$$

$$\delta\psi_M = [\partial_M + \frac{1}{4}\hat{\omega}_{MAB}\Gamma^{AB} + \frac{i}{144}(\Gamma^{NOPQ}{}_M - 8\delta_M{}^N\Gamma^{OPQ})\hat{F}_{NOPQ}]\varepsilon .$$

Отметим, что $\hat{\omega}$ и $\hat{F}$ являются суперковариантными объектами (их вариации под действием суперсимметрии не содержат членов типа $\partial\varepsilon$). Бозонными симметриями действия являются: 1) репараметризационная инвариантность (параметр $\xi^M(x)$); 2) локальная лоренцева $SO(10, 1)$-инвариантность ($\Lambda_A{}^B(x)$); 3) абелева калибровочная инвариантность для поля $A_{MNP}(\rho_{NP}(x))$. Можно показать, что алгебра всех калибровочных преобразований является замкнутой на массовой оболочке. Геометрическая интерпретация поля A_{MNP} как калибровочного поля пока остается неясной: если $e_M{}^A$ есть "калибровочное поле", отвечающее трансляциям, а ψ_M – калибровочное поле для суперсимметрии, то для каких преобразований калибровочным полем является A_{MNP}[1]?

В заключение отметим, что при подсчете степеней свободы мы могли бы использовать вместо A_{MNP} антисимметричное тензорное поле A_{MNPQRS} с калибровочной инвариантностью $\delta A_{MNPQRS} = 6\partial_{[M}\rho_{NPQRS]}$. Однако, хотя свободный лагранжиан теории с учетом этого поля легко построить, соответствующая теория со взаимодействием не существует [42].

E. Размерная редукция 11-мерной супергравитации к 4 измерениям

Выполним теперь обычную размерную редукцию 11-мерной супергравитации [12, 13]. Мы произведем также дуальные преобразования (в 4-мерном пространстве), которые переводят псевдовекторное поле в векторное, а поле антисимметричного тензора – в скалярное поле. Это позволит установить связь между спектром редуцированной теории и составом полей обычной супергравитации с $N = 8$. Анализ скрытых симметрий теории мы отложим до следующего параграфа (§ 3). 2475

Состав полей 4-мерной теории приведен в табл. 2. Его следует сравнить с составом полей в супергравитации с $N = 8$:

$$g_{\mu\nu}(1),\quad \psi_\mu{}^A(8),\quad A_\mu{}^{[AB]}(28),\quad \chi^{[ABC]}(56),$$

$$\varphi^{[ABCD]} = \frac{1}{24}\varepsilon^{ABCDEFGH}\bar{\varphi}_{EFGH}(70).$$

---

[1] Данный вопрос рассматривается в рамках подхода калибровочной теории на групповом многообразии в работах [57, 58]. – *Прим. перев.*

Таблица 2.

Поля при $D = 11$	Поля при $D = 4$	Число полей	Число степеней свободы	Полное число степеней свободы
	$g_{\mu\nu}$	1	2	2
g_{MN}	$g_{\mu i}$	7	2	14
	g_{ij}	28	1	28
				44
	$A_{\mu\nu\rho}$	1	0	0
	$A_{\mu\nu i}$	7	1	7
A_{MNP}	$A_{\mu ij}$	21	2	42
	A_{ijk}	35	1	35
				84
	$\psi_\mu{}^A$	8	2	16
ψ_M	$\psi_i{}^A$	56	2	112
				128
	$A = 1, \ldots, 8$			

1. Диагонализация калибровочных преобразований

Вариация поля A_{MNP} в 11 измерениях под действием общекоординатных и калибровочных преобразований имеет вид

$$\delta A_{MNP} = 3\partial_{[M}\xi^Q A_{NP]Q} + \xi^Q \partial_Q A_{MNP} + 3\partial_{[M}\rho_{NP]}. \tag{2.39}$$

Накладывая ограничение $\partial_i \rho_{NP} = 0$ и приведенные выше условия на ξ^M, находим

$$\begin{aligned} \delta A_{ijk} &= \xi^\mu \partial_\mu A_{ijk} + 3a_{[i}{}^l A_{jk]l}, \\ \delta A_{\mu ij} &= \xi^\nu \partial_\nu A_{\mu ij} + \partial_\mu \xi^\nu A_{\nu ij} + \partial_\mu \xi^k A_{kij} - 2a_{[i}{}^k A_{\mu j]k} + \partial_\mu \rho_{ij}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Как обычно, поля $A_{\mu ij}$, $A_{\mu\nu i}$ и $A_{\mu\nu\rho}$ инвариантны относительно калибровочных $U(1)^7$-преобразований. Как и ранее, мы можем определить инвариантные

тензоры, исходя из $A_{ABC} = e_A{}^M e_B{}^N e_C{}^P A_{MNP}$, т.е. получая в 4 измерениях

$$A'_{ijk} = A_{ijk},$$

$$A'_{\mu ij} = e_\mu{}^\alpha e_i{}^a e_j{}^b A_{\alpha a b} = A_{\mu ij} - B_\mu{}^k A_{kij}, \tag{2.41}$$

$$A'_{\mu\nu i} = e_\mu{}^\alpha e_\nu{}^\beta e_i{}^a A_{\alpha\beta a} = A_{\mu\nu i} + 2B_{[\mu}{}^j A_{\nu]ji} + B_\mu{}^i B_\nu{}^j A_{jki}.$$

Под действием калибровочных преобразований с параметрами ξ^i и ρ_{ij} мы имеем

$$\delta A'_{ijk} = 0, \quad \delta A'_{\mu ij} = \partial_\mu \rho_{ij}, \tag{2.42}$$

$$\delta A'_{\mu\nu i} = 2\partial_{[\mu}\rho_{\nu]i} + 2B^j_{[\mu}\partial_{\nu]}\rho_{ji},$$

так что поле $A'_{\mu\nu i}$ уже не является инвариантным относительно ρ_{ij}-калибровочных преобразований. В действительности не существует поля $A''_{\mu\nu i}$, которое было бы калибровочным полем для $\rho_{\mu i}$ преобразований и одновременно оставалось инвариантным относительно ξ^i и ρ_{ij}-калибровочных преобразований. Аналогичная проблема возникает для $A'_{\mu\nu\rho}$. Тем не менее мы можем определить полностью калибровочно-инвариантные тензоры, исходя из F_{ABCD}:

$$F_{\alpha bcd} = e_\alpha{}^\mu e_b{}^i e_c{}^j e_d{}^k \partial_\mu A_{ijk},$$

$$F_{\alpha\beta cd} = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu e_c{}^i e_d{}^j F^4_{\mu\nu ij},$$

$$F_{\alpha\beta\gamma d} = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu e_\gamma{}^\rho e_d{}^i F^4_{\mu\nu\rho i}, \tag{2.43}$$

$$F_{\alpha\beta\gamma\delta} = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu e_\gamma{}^\rho e_\delta{}^\sigma F^4_{\mu\nu\rho\sigma}.$$

При этом мы, в частности, получим

$$F^4_{\mu\nu ij} = \partial_\mu A'_{\nu ij} - \partial_\nu A'_{\mu ij} + G^k_{\mu\nu} A_{ijk},$$

$$F^4_{\mu\nu\rho i} = 3\partial_{[\mu} A'_{\nu\rho]i} + 3G_{[\mu\nu}{}^k A'_{\rho]ik}. \tag{2.44}$$

2. Преобразования дуальности

Преобразования дуальности связывают, например, электрическое поле с магнитным, а скаляр φ с антисимметричным тензором $A_{\mu\nu}$. Рассмотрим лагранжиан

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(F_{\mu\nu}, F_{\mu\nu\rho}, F_{\mu\nu\rho\sigma}), \tag{2.45}$$

где $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu\rho}$ и $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ — напряженности полей A_μ, $A_{\mu\nu}$ и $A_{\mu\nu\rho}$, которые непосредственно не входят в $\mathfrak{L}$. Отвлекаясь от топологических "тонкостей" (не учитывая гармонические нулевые моды), мы можем характеризовать эти напряженности заданием связей

$$\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0, \qquad \partial_{[\mu}F_{\nu\rho\sigma]} = 0 \tag{2.46}$$

(связь для $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ не требуется). В таком случае мы можем перейти к формализму первого порядка, добавив указанные связи в лагранжиан с помощью множителей Лагранжа B_μ и φ:

$$\Delta \mathfrak{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(B_\mu \partial_\nu F_{\rho\sigma} + \varphi\partial_\mu F_{\nu\rho\sigma}) = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}(\partial_\nu B_\mu F_{\rho\sigma} + \partial_\mu \varphi F_{\nu\rho\sigma}) + \ldots . \tag{2.47}$$

В полном лагранжиане $\mathfrak{L} + \Delta\mathfrak{L}$ мы можем "проинтегрировать" по полям $F_{\mu\nu}$, $F_{\mu\nu\rho}$ и $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ (т.е. исключить их с помощью уравнений поля, используя то обстоятельство, что они входят в лагранжиан алгебраически). Полученный лагранжиан "второго порядка" будет иметь вид

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}'(G_{\mu\nu}, \partial_\mu\varphi), \tag{2.48}$$

где $G_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

В рассматриваемом случае супергравитации произведем преобразования

$$A_{\mu ij} \to B_\mu{}^{ij}, \qquad A_{\mu\nu i} \to \varphi^i$$

и исключим поле $A_{\mu\nu\rho}$. В силу обсуждавшихся выше калибровочных симметрий лагранжиан может зависеть лишь от $F^4_{\mu\nu ij}$, $F^4_{\mu\nu\rho i}$, $F^4_{\mu\nu\rho\sigma}$ и A_{ijk}. Учитывая определения полей $F^4_{\ldots}$, мы должны добавить к $\mathfrak{L}$ член (мы отбрасываем полную производную)

$$\Delta\mathfrak{L} = -\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\Big[\frac{1}{12}\partial_\mu\varphi^i F^4_{\nu\rho\sigma i} + \frac{1}{8}\varphi^i G^k_{\nu\rho} F^4_{\mu\sigma ik} +$$
$$+ \frac{1}{8} G^{ij}_{\mu\nu}(F^4_{\rho\sigma ij} - G^k_{\rho\sigma} A_{ijk})\Big]. \tag{2.49}$$

Замечания. 1. На квантовом уровне точной эквивалентности между $A_{\mu\nu}$ и φ нет. Например, эти поля дают разные вклады в однопетлевые топологические контрчлены [28][1].

---

[1] Вопрос об эквивалентности зависит от выбора граничных условий (подробнее см. в лекциях Даффа в данном сборнике, с 129). Отвлекаясь от "топологических" различий, можно доказать, что эффективные действия для теорий, связанных с дуальным преобразованием, совпадают на массовой оболочке, т.е. совпадают соответствующие S-матрицы (см. в этой связи работы [34, 59, 60]). — *Прим. перев.*

2. Учет гармонических решений позволяет ввести в теорию дополнительные параметры. Это легко пояснить на примере исключения поля $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ [1, 28]. Варьируя лагранжиан $\mathfrak{L} = -(e/48)F^2_{\mu\nu\rho\sigma}$ по $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ и $A_{\mu\nu\rho}$, находим

$$\begin{aligned}&\text{I}.\ \delta\mathfrak{L}/\delta F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \to F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0,\\ &\text{II}.\ \delta\mathfrak{L}/\delta A_{\mu\nu\rho} = 0 \to D^\mu F_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad \text{т.е.} \quad F_{\mu\nu\rho\sigma} = ea\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma},\end{aligned} \tag{2.50}$$

где a — произвольная константа. Легко видеть, что II можно получить из лагранжиана

$$\mathfrak{L}' = -\frac{e}{48}F^2_{\mu\nu\rho\sigma} + a\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{2.51}$$

Если $F_{\mu\nu\rho\sigma}$ — внешний дифференциал, то второй член в выражении для $\mathfrak{L}'$ есть полная производная. На решении $F_{\mu\nu\rho\sigma} = a\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ лагранжиан пропорционален ea^2, что эквивалентно добавлению космологической константы. Такой способ введения космологического члена может быть применен и при редукции 11-мерной супергравитации [1].

3. Бозонная часть лагранжиана

В итоге мы получаем полный лагранжиан для бозонных полей $g_{\mu\nu}$, g_{ij}, $B_\mu{}^i$, $B_\mu{}^{ij}$, φ^i и A_{ijk} ($i = 1, \ldots, 7$). После вейлевского преобразования он имеет вид

$$\mathfrak{L}_B = -\frac{e}{4}R + L_S + L_V,$$

где

$$\begin{aligned}L_S = &-\frac{e}{16}g^{\mu\nu}\partial_\mu g^{ij}\partial_\nu g_{ij} + \frac{e}{32}g^{\mu\nu}\partial_\mu \ln\Delta\,\partial_\nu \ln\Delta -\\ &-\frac{e}{12}g^{\mu\nu}\partial_\mu A_{ijk}\partial_\nu A_{lmn}g^{il}g^{jm}g^{kn} -\\ &-\frac{e}{8\Delta}g_{iq}g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\varphi^i - \frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\,{}^*A^{ijkl}\partial_\mu A_{jkl}\right)\times\\ &\times\left(\partial_\nu\varphi^q - \frac{1}{3}\sqrt{\Delta}\,{}^*A^{qrst}\partial_\nu A_{rst}\right),\end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}L_V = &\frac{e}{16}\sqrt{\Delta}\,g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}g_{ij}G^i{}_{\mu\nu}G^j{}_{\rho\sigma} + \frac{1}{48}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,{}^*A^{ijkl}A_{ijp}A_{klq}G^p_{\mu\nu}G^q_{\rho\sigma} +\\ &+\frac{1}{8}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G^k_{\mu\nu}G^{ij}_{\rho\sigma}A_{ijk} - \frac{e}{8\sqrt{\Delta}}Y^{ij}\mathfrak{M}_{ij,pq}Y^{pq}.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Здесь использованы обозначения: $*A^{ijkl} = (1/6\sqrt{\Delta})\varepsilon^{ijklmnp}A_{mnp}$,

$$Y^{ij}_{\mu\nu} = G^{ij}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\, *A^{ijkl}A_{klm}G^{m}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(\varphi^i G^j_{\mu\nu} - \varphi^j G^i_{\mu\nu}),$$

$$\mathfrak{M}_{ij,\,kl} = [g^{i[k}g^{l]j} - j\,*A^{ijkl}]^{-1}\,.$$

По индексам μ, ν $\mathfrak{M}$ имеет следующую структуру: $\mathfrak{M} = [I(\ldots) - j(\ldots)]^{-1}$, где $I = g^{\mu[\rho}g^{\sigma]\nu}$, $j = (1/2e)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

4. Редукция спинорных полей

Матрицы Γ, образующие алгебру Клиффорда, в 11 измерениях имеют размер 32×32 и могут быть представлены в виде

$$\Gamma^{\alpha} = \gamma^{\alpha} \otimes 1^{A}{}_{B}, \qquad \alpha = 0, \ldots, 3,$$

$$\Gamma^{a} = \gamma_5 \otimes (\Gamma^{a})^{A}{}_{B}, \qquad a = 1, \ldots, 7, \quad A = 1, \ldots, 8.$$

Действительные антисимметричные матрицы $(\Gamma^a)^A{}_B$ образуют алгебру Клиффорда для группы $SO(7)$ и имеют размер 8×8.

Как и в случае $A_{\mu ij}$, мы можем ввести поля ψ_μ и ψ_i, инвариантные относительно $U(1)^7$-калибровочных преобразований. Необходимо также осуществить вейлевские переопределения этих спинорных полей, обеспечивающие диагональный вид кинетических членов для ψ_μ и χ_a:

$$\psi_\mu = e^{\alpha}{}_{\mu(4)}\Delta^{-1/8}(\psi_M e^M_\alpha - \frac{1}{2}\gamma_5\gamma_\alpha\Gamma^a\psi_M e^M{}_a), \tag{2.54}$$

$$\chi_a = \Delta^{-1/8}\psi_M e^M{}_a\,. \tag{2.55}$$

Из кинетического члена для ψ_M в 11 измерениях получаем

$$L_F^{\text{кин}} = -\frac{ie}{2}\bar{\psi}_\mu\gamma^{\mu\nu\rho}\partial_\nu\psi_\rho - \frac{ie}{2}\bar{\chi}^A{}_a\left(\frac{1}{2}\Gamma^a\Gamma^b + \eta^{ab}\right)_A{}^B \times$$

$$\times\, \gamma^\mu\partial_\mu\chi_{b\,B} + (\text{Взаимодействия со скалярами и векторами}). \tag{2.56}$$

Окончательная диагонализация кинетического члена для $\chi_a{}^A$ обеспечивается переопределением

$$\lambda_{ABC} = \frac{3}{2}\Gamma^a{}_{[AB}\chi_{aC]}\,.$$

В результате имеем

$$L^{\text{кин}}_{1/2} = \frac{ie}{12}\bar{\lambda}_{ABC}\gamma^\mu\partial_\mu\lambda_{ABC}\,. \tag{2.57}$$

Для удобства в дальнейшем выполним также киральные переопределения полей $\psi_\mu{}^A$ и λ_{ABC}:

$$\psi^A{}_\mu = (i\gamma_5)^{-1/2}(\psi_\mu{}^A)_{\text{нов}}, \qquad \lambda_{ABC} = (i\gamma_5)^{-1/2}(\lambda_{ABC})_{\text{нов}}. \tag{2.58}$$

5. Взаимодействия спиноров

Чтобы получить простую форму лагранжиана взаимодействия спиноров, следует воспользоваться различными алгебраическими свойствами матриц $(\Gamma^a)^A{}_B$ [13], в частности соотношением

$$\Gamma^{[ab}{}_{AB}\chi^{c]}{}_B = -\frac{1}{3\sqrt{2}}\Gamma^{[ab}{}_{[AB}\Gamma^{c]}{}_{CD]}\lambda_{BCD}. \tag{2.59}$$

В этом существенном упрощении решающую роль играет использование λ_{ABC}, и окончательно мы получаем

$$\begin{aligned} L_F = {} & \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar\psi_\mu{}^A\gamma_\sigma\gamma_5(\partial_\nu\delta_A{}^B - Q^{(0)}{}_{\nu A}{}^B)\psi_\rho{}^B + \\ & + \frac{ie}{12}\bar\lambda_{ABC}\gamma^\mu(\partial_\mu\delta_A{}^D - 3Q^{(0)}{}_{\mu A}{}^D)\lambda_{DBC} - \\ & - \frac{e}{3\sqrt{2}}\bar\psi_{\mu D}\gamma^\nu\gamma^\mu\bar P_\nu{}^{(0)ABCD}\lambda_{ABC} + \\ & + \frac{e}{4\sqrt{2}}\bar\psi_\mu{}^A\gamma^{[\nu}\mathfrak{F}_{AB}{}^{(0)}\gamma^{\mu]}\psi_\nu{}^B - \frac{ie}{8}\bar\psi_\mu{}^C\mathfrak{F}_{AB}{}^{(0)}\gamma^\mu\lambda_{ABC} - \\ & - \frac{e}{288\sqrt{2}}\eta\varepsilon^{ABCDEFGH}\bar\lambda_{ABC}\mathfrak{F}^{(0)}_{DE}\lambda_{FGH} + \text{(Члены 4-го порядка по фер-} \\ & \text{мионам)}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

где η – " коэффициент самодуальности" ($\eta = \pm 1$), значение которого определяется конкретным видом представления Γ-матриц, отвечающих группе $SO(7)$:

$$\Gamma^a{}_{[AB}\Gamma^b{}_{CD]} = (\eta/4!)\varepsilon_{ABCDEFGH}\Gamma^a{}_{[EF}\Gamma^b{}_{GH]}.$$

Величины Q, $\bar P$ и $\mathfrak{F}$ выражаются через $e^i{}_a$, φ^i, A_{ijk}, $G^i{}_{\mu\nu}$ и $G^{ij}{}_{\mu\nu}$ следующим

образом:

$$Q^{(0)}{}_{\nu A}{}^{B} = -\frac{1}{4}\Big[e^{i}{}_{a}\partial_{\nu}e_{ib}\Gamma^{ab} + e_{ia}\Big(\frac{\partial_{\nu}\varphi^{i}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{3}{}^{*}A^{ijkl}\partial_{\nu}A_{ijkl}\Big)\Gamma^{a} - \frac{i}{3}\gamma_{5}e^{i}_{a}e^{j}{}_{b}e^{k}{}_{c}\partial_{\nu}A_{ijk}\Gamma^{abc}\Big]_{A}{}^{B}, \tag{2.61}$$

$$\bar{P}^{(0)ABCD}_{\nu} = \frac{1}{8}\Big\{e^{e}{}_{a}\partial_{\nu}e_{ib}\Gamma^{ac}{}_{[AB}(\Gamma^{b}{}_{c})_{CD]} + 2i\gamma_{5}e^{i}{}_{a}e^{j}{}_{b}e^{k}{}_{c}\partial_{\nu}A_{ijk}\Gamma^{ab}{}_{[AB}\Gamma^{c}{}_{CD]} +] + e_{ia}\Big(\frac{\partial_{\nu}\varphi^{i}}{\sqrt{\Delta}} - \frac{1}{3}{}^{*}A^{ijkl}\partial_{\nu}A_{jkl}\Big)\Gamma^{ac}{}_{[AB}(\Gamma^{c})_{CD]}\Big\}. \tag{2.62}$$

Тензор $P^{(0)}$ удовлетворяет соотношению самодуальности (чертой обозначено комплексное сопряжение)

$$\bar{P}^{(0)ABCD}_{\nu} = \frac{\eta}{4!}\varepsilon^{ABCDEFGH}P^{(0)}_{\nu EFGH}, \tag{2.63}$$

$$\mathcal{F}^{(0)}_{AB} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\gamma^{\rho\sigma}\Big\{-G^{i}_{\rho\sigma}e_{ia}\Gamma^{a}\Delta^{1/4} + \Delta^{-1/4}\bar{\mathfrak{M}}_{ij,pq}e^{i}{}_{a}e^{j}{}_{b}\Gamma^{ab}\times\Big(G^{pq}_{\rho\sigma} + \varphi^{p}G^{q}_{\rho\sigma} + \frac{1}{8}\sqrt{\Delta}\,{}^{*}A^{pqmn}A_{mnl}G^{l}_{\rho\sigma}\Big)\Big\}_{AB}. \tag{2.64}$$

2475

Можно заметить, что нётеровский член взаимодействия $\bar{\psi}\lambda\cdot P^{(0)}$ в точности равен квадратному корню из "кинетического члена" скаляров L_S, как это и должно быть в супергравитации.

6. Законы преобразований суперсимметрии

При проведении редукции мы должны предположить, что параметр суперпреобразований ε не зависит от дополнительных координат – это необходимо для того, чтобы от этих координат не зависели поля. В результате 32 компоненты параметра ε разбиваются на 8 четырехкомпонентных спиноров ε^{A} в 4 измерениях.

Для определения законов преобразования суперсимметрии в 4 измерениях, следует учесть все переопределения полей, сделанные в процессе редукции, а также произвести над ε^{A} киральное и вейлевское преобразования. Чтобы сохранить калибровочное условие $e_{m}{}^{\alpha} = 0$, необходимо дополнительно выпол-

нить компенсирующее $SO(10,1)$-преобразование с параметром $\Omega^{\alpha}{}_{a}$. Для упрощения вида преобразований суперсимметрии следует учесть, что их всегда можно скомбинировать с локальными $SO(3,1)$- или локальными $SO(7)$-преобразованиями. В частности, это позволяет обеспечить стандартную форму преобразования $e_{\mu}{}^{\alpha}$:

$$\delta e_{\mu}{}^{\alpha} = -i\,\bar{\varepsilon}^{A}\gamma^{\alpha}\psi_{\mu A}. \tag{2.65}$$

Новые поля, полученные в результате преобразований дуальности, не являются функциями исходных полей (нелокальная зависимость от исходных полей имеется лишь на массовой оболочке). Поэтому при отыскании их законов преобразования следует исходить из условия суперинвариантности лагранжиана первого порядка (метод ван Ньювенхёйзена). Для иллюстрации рассмотрим простой пример — суперсимметричную теорию с лагранжианом $\mathfrak{L}(F_{\mu\nu\rho}, \psi)$, $F_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}A_{\nu\rho]}$, инвариантным относительно некоторых преобразований $\delta A_{\mu\nu}$ и $\delta\psi$. Лагранжиан первого порядка имеет вид

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{L}(F_{\mu\nu\rho}, \psi) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}F_{\mu\nu\rho}\varphi. \tag{2.66}$$

При преобразованиях $\delta\psi$ и $\delta F_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}\delta A_{\nu\rho]}$ вариация лагранжиана $\mathfrak{L}$ может обратиться в нуль лишь в том случае, если $F_{\mu\nu\rho}$ есть "вихрь". Следовательно, ее можно записать как

$$\delta\mathfrak{L} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}F_{\mu\nu\rho}S. \tag{2.67}$$

Тогда из соотношения

$$\delta\mathfrak{L}' = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}F_{\mu\nu\rho}S + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_{\sigma}F_{\mu\nu\rho}\delta\varphi \tag{2.68}$$

$(\partial_{[\sigma}\delta F_{\mu\nu\rho]} = 0)$

вытекает, что выбором $\delta\varphi = -S$ обеспечивается инвариантность лагранжиана $\mathfrak{L}'$ относительно преобразований $\delta\psi$, $\delta F_{\mu\nu\rho} = 3\partial_{[\mu}\delta A_{\nu\rho]}$ и $\delta\varphi = -S$. После этого можно перейти к исключению $F_{\mu\nu\rho}$. Хотя такой метод в принципе прост, практическое определение S может быть связано с большими трудностями.

Ж. Заключительные замечания о размерной редукции

1. Размерная редукция говорит о наличии скрытых симметрий. Примером теории со скрытыми симметриями, который мы подробно рассмотрим, может служить супергравитация с $N = 8$. Ранее было замечено, что возможность получения супергравитации с $N = 4$ путем размерной редукции супергравитации

с $N = 1$ в пространстве 10 измерений есть аргумент в пользу существования варианта супергравитации с $N = 4$ с глобальной $SU(4) \sim SO(6)$-инвариантностью лагранжиана, а не только уравнений движения. Такой вариант теории с $N = 4$ был действительно построен и оказался эквивалентным стандартной $SO(4)$-супергравитации на уравнениях движения. Одновременно это привело к открытию первой из скрытых симметрий в супергравитации: $SU(1, 1)$-симметрии супергравитации с $N = 4$ [19].

2. Существует метод, называемый размерной редукцией на основе преобразования Лежандра, который позволяет частично решить проблему отыскания вспомогательных полей [50, 52].

3. Существует более общая схема размерной редукции [5, 47]. В ней одной степени свободы в $4 + N$ измерениях по-прежнему сопоставляется одна степень свободы в 4 измерениях. Однако симметрией гравитационного сектора является не группа $U(1)^N$, а неабелева калибровочная группа с N генераторами. Если мы потребуем равенства нулю космологической константы и положительности скалярного потенциала в редуцированной теории, то мы придем к тому, что эта группа будет так называемой плоской группой. Хотя исходная теория является безмассовой, в редуцированной теории имеется ряд массовых параметров и потенциал для скалярных полей. В случае теорий с глобальной суперсимметрией (не учитывающих гравитацию) получающаяся теория, как правило, имеет "мягко" нарушенную суперсимметрию[1].

В случае теории с локальной суперсимметрией (супергравитации) теория, к которой приводит в конце концов редукция, инвариантна относительно некоторых новых локальных преобразований типа суперсимметрии, однако алгебра этих преобразований отлична от алгебры локальной суперсимметрии и не содержит соответствующей алгебры глобальных преобразований [21, 46, 47].

§ 3. *Скрытые симметрии супергравитации с $N = 8$ в 4 измерениях*

Выполнив размерную редукцию 11-мерной супергравитации, выше мы получили супергравитацию с $N = 8$, в которой поля $g_{\mu\nu}$, Ψ_μ^A, $B_\mu{}^i$, $B_\mu{}^{ij}$, λ_{ABC} (или $\chi_a{}^A$), g^{ij} и φ^i отвечают представлениям группы $SO(7)$. Возникает естественный вопрос: совпадает ли эта теория с супергравитацией с $N = 8$, поля которой преобразуются по представлениям группы $SO(8)$? Положительный ответ на этот вопрос подсказывается замечанием, что супергравитация с $N = 8$ должна совпадать с теорией с $N = 7$, поля которой описываются неприводимыми представлениями группы $SO(7)$. В частности, скалярные поля теории с $N = 7$

---

[1] Обобщенная размерная редукция суперсимметричной теории Янга — Миллса с $N = 1$ в 10 измерениях, приводящая к "аналогу" супер-янг-миллсовской теории с $N = 4$ в 4 измерениях, рассматривалась в работах [61, 62] — *Прим. перев.*

принадлежат неприводимому представлению с размерностью 35, тогда как скалярные поля g^{ij}, φ^i, возникающие при редукции, соответствуют представлению 28 + 7. Эту проблему мы решим, выявив скрытые симметрии супергравитации с $N = 8$ и использовав свойство "триальности" группы $SO(8)$, в силу которого существуют два разных вложения группы $SO(7)$ в группу $SO(8)$.

А. Общая стратегия поиска скрытых симметрий

Основная идея состоит в том, чтобы попытаться обобщить результат размерной редукции: скалярные поля, возникающие из метрического тензора, параметризуют фактор-пространство $SL(7, R)/SO(7)$. Желательно представить *все скаляры и псевдоскаляры в теории как элементы некоторого фактор-пространства* G/H. Пространство G/H состоит из элементов $\mathcal{V} \in G$, определенных с точностью до локальных преобразований группы H [5, 8]. В таком случае теория была бы инвариантной относительно преобразования $\mathcal{V} \to g\mathcal{V}h(x)$, $g \in G$, $h(x) \in H$, производимого совместно с некоторыми преобразованиями остальных полей. Записав $\mathcal{V} = \exp w$, где w – элемент алгебры Ли группы G, мы получаем, что максимальная подгруппа этих преобразований, действующая на элемент w линейно, изоморфна группе H (мы будем обозначать ее через H_D):

$$\mathcal{V} \to h^{-1}\mathcal{V}h, \qquad h \in H. \tag{3.1}$$

В случае супергравитации с $N = 8$ можно ожидать, что максимальной группой, действующей линейно на 70 скалярных полей φ_{ABCD}, будет группа $SU(8)$. Тогда мы имели бы $\dim G = \dim SU(8) + 70 = \underline{133}$, что согласуется с выбором $G = E_7$. Группа G должна быть некомпактной, так как она должна содержать некомпактную группу $SL(7, R)$, следующую из размерной редукции. И действительно, существует некомпактная версия группы E_7, обозначаемая через $E_{7(+7)}$ (см. ниже), максимальная компактная подгруппа которой есть $SU(8)$. Этим одновременно обеспечивается положительность лагранжиана для скаляров.

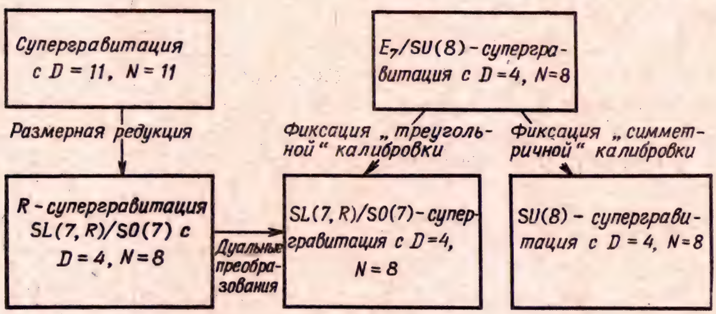
Из полученных ранее результатов для теорий с $N \leqslant 4$ [15, 16, 33] мы знаем, что при наличии векторных полей группа H_D реализуется лишь на уравнениях поля. Действительно, при действии групп G и H_D на векторных полях уравнения движения $\partial^\mu H_{\mu\nu} = 0$ переходят в тождества Бьянки $\partial^\mu \widetilde{G}_{\mu\nu} = 0$, и наоборот (см. также [34]). Вследствие этого, если имеется N векторных полей, то число $2N$ должно быть размерностью неприводимого представления группы H_D, , а значит, и группы G. Фундаментальное представление группы E_7 имеет размерность $\underline{56}$, что согласуется с числом векторных полей, равным 28.

Используя размерную редукцию, мы нашли также, что векторные поля являются синглетами калибровочной группы $SO(7)$ и что спинорные поля – син-

глеты глобальной группы $SL(7, R)$. Таким образом, ожидаемый состав полей супергравитации с $N = 8$ таков: 1 гравитон – синглет групп E_7 и SU (8); 8 гравитино – синглеты группы E_7 и в представлении 8 группы $SU(8)$; 28 векторных полей, напряженности которых $G_{\mu\nu}$ и $\widetilde{H}_{\mu\nu} \sim \delta\widetilde{\mathfrak{L}}/\delta G_{\mu\nu}$ являются синглетами группы $SU(8)$ и принадлежат представлению 56 группы E_7; 56 полей со спином (1/2) – синглеты группы E_7 и в представлении 56 группы SU (8); 70 скалярных полей, описываемых матрицей 56 × 56 группы E_7, которая преобразуется по представлению 56 группы E_7 и комплексному представлению 28 группы $SU(8)$.

Итак, покажем, что существует E_7/SU (8)-вариант супергравитации с $N = 8$, соответствующий схеме, представленной в табл. 3.

Таблица 3



Здесь R-супергравитация получается непосредственно из 11-мерной теории, так что в ней часть полей со спином 0 описывается антисимметричными тензорами; SO (8)-супергравитация есть супергравитация с $N = 8$ в обычном варианте, которая изучалась в работах [25, 26], где были получены лишь частичные результаты. При фиксации SU (8)-калибровки группа E_7 действует на все поля, в частности, на спинорные поля (соответствующие преобразования аналогичны SU (8)-преобразованиям с параметрами, зависящими от скалярных полей).

Б. Восстановление $SL(8, R)$-симметрии

Прежде чем давать определение группы E_7 и показывать, что она действительно является группой симметрии рассматриваемой теории, мы сделаем промежуточный шаг в бозонном секторе и выявим глобальную $SL(8, R)$-симметрию и локальную SO (8)-симметрию, которые объединяют $B_\mu{}^i$ с $B_\mu{}^{ij}$ и g^{ij} с φ^i.

Не учитывая псевдоскалярное поле A_{ijk}, мы можем записать лагранжианы бозонов в виде

$$\mathcal{L}^{(+)}_{B} = -\frac{e}{16}\partial_\mu g^{ij}\partial^\mu g_{ij} - \frac{e}{8\Delta}\partial_\mu\varphi^i\partial_\mu\varphi^i g_{ij} + \frac{e}{32}\frac{\partial_\mu\Delta\partial^\mu\Delta}{\Delta^2} +$$

$$+\frac{e}{16}\sqrt{\Delta}g_{ij}G^i_{\mu\nu}G^{j\mu\nu} - \frac{e}{8\sqrt{\Delta}}g_{ip}g_{jq}[G^{ij}_{\mu\nu} + \varphi^{[i}G^{j]}_{\mu\nu}][G^{pq}_{\rho\sigma} +$$

$$+\varphi^{[p}G^{q]}_{\rho\sigma}]g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}. \tag{3.2}$$

Определяя

$$S^{i^\bullet j^\bullet} = \Delta^{-3/4}\begin{pmatrix}\Delta g^{ij} - \varphi^i\varphi^j & \varphi^i \\ \varphi^i & -1\end{pmatrix}, \quad G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu} = (G^{ij}_{\mu\nu}, -\frac{1}{2}G^i_{\mu\nu}), \quad G^{i^\bullet 8}_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}G^i_{\mu\nu},$$

где $\det S = 1$, мы приходим к простому выражению

$$\mathcal{L}^{(+)}_{B} = -\frac{e}{16}\partial_\mu S^{i^\bullet j^\bullet}\partial^\mu S_{i^\bullet j^\bullet} - \frac{e}{16}S_{i^\bullet p^\bullet}S_{j^\bullet q^\bullet}G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu}G^{p^\bullet q^\bullet}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}. \tag{3.3}$$

Как уже говорилось выше, мы можем ввести 8-репер $\mathcal{V}^{a^\bullet}_{i^\bullet}$, определенный с точностью до локальных $SO(8)$-преобразований $S_{i^\bullet j^\bullet} = \mathcal{V}^{a^\bullet}_{i^\bullet}\mathcal{V}^{b^\bullet}_{j^\bullet}\eta_{a^\bullet b^\bullet}$. Конкретное представление репера $\mathcal{V}^{a^\bullet}_{i^\bullet}$, которое нарушает локальную $SO(8)$-инвариантность до группы $SO(7)$, таково:

$$\mathcal{V}^{a^\bullet}_{i^\bullet} = \Delta^{-1/8}\begin{pmatrix} e^a_i & 0 \\ \varphi^j e^a_j & \sqrt{\Delta}\end{pmatrix}, \quad \det\mathcal{V} = 1. \tag{3.4}$$

Используя величины

$$A_{abc} = e^i_a e^j_b e^k_c A_{ijk}, \quad {}^*A_{abcd} = \frac{1}{6}\varepsilon^{abcdefg}A_{efg},$$

мы можем переписать векторную часть лагранжиана в виде

$$L_V = -\frac{1}{8}e\mathcal{V}^{a^\bullet}_{i^\bullet}\mathcal{V}^{b^\bullet}_{j^\bullet}\mathcal{V}^{c^\bullet}_{k^\bullet}\mathcal{V}^{d^\bullet}_{l^\bullet}G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu}G^{k^\bullet l^\bullet}_{\rho\sigma}\mathcal{N}^{\mu\nu,\rho\sigma}_{a^\bullet b^\bullet, c^\bullet d^\bullet}, \tag{3.5}$$

где $\mathcal{N}$ есть (28 × 28)-матричная функция, зависящая лишь от A_{abc}, которая полностью приведена в работе [13]. Выражение для лагранжиана бозонов упростится после учета E_7-симметрии.

В. Определение группы $E_{7(+7)}$

Мы определим группу E_7, указав ее инфинитезимальные преобразования в 56-мерном фундаментальном представлении. Пространство этого представле-

ния можно параметризовать двумя антисимметричными тензорами x^{ij} и y_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 8)$:

$$\delta x^{ij} = \Lambda^i{}_k x^{kj} + \Lambda^j{}_k x^{ik} + \frac{1}{24} \varepsilon^{ijklmnpq} \Sigma_{mnpq} y_{kl}, \qquad (3.6)$$

$$\delta y_{ij} = \Lambda_i^k y_{kj} + \Lambda_j^k y_{ik} + \Sigma_{ijkl} x^{kl},$$

где $\lambda^k_i = -\Lambda^i{}_k$, $\Lambda^i{}_i = 0$, а тензор Σ_{ijkl} полностью антисимметричен (выбор $\Sigma = 0$ отвечает подгруппе $SL(8, R)$).

Имеются два инварианта группы E_7. Один из них является билинейным и показывает, что E_7 есть подгруппа группы $Sp(56)$ с симплектической метрикой Ω:

$$I = x_1^{ij} y_{2ij} - x_2^{ij} y_{1ij} \qquad (3.7)$$

Другой является квадратичным и характеризует собственно группу E_7:

$$J = x^{ij} y_{jk} x^{kl} y_{li} - \frac{1}{4} x^{ij} y_{ij} x^{kl} y_{kl} +$$

$$+ \frac{1}{96} [\varepsilon^{ijklmnpq} y_{ij} y_{kl} y_{mn} y_{pq} + \varepsilon_{ijklmnpq} x^{ij} x^{kl} x^{mn} x^{pq}]. \qquad (3.8)$$

Если X – элемент группы E_7, то, будучи также элементом группы $Sp(56)$, он удовлетворяет соотношениям

$$X^t \Omega X = \Omega, \qquad X^{-1} = -\Omega X^T \Omega, \qquad (3.9)$$

$$\Omega^2 = -\mathbb{1}, \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Подгруппа $SU(8)$ группы E_7 задается условием

$$[X, \Omega] = 0, \text{ т.е. } X^T X = \mathbb{1} \qquad (3.10)$$

Г. E_7-формулировка для скаляров и векторов

Начнем с бозонной части лагранжиана. Уравнения движения для векторов можно записать в виде

$$\partial_\mu (e\tilde{H}^{\mu\nu}_{i^\bullet j^\bullet}) = 0, \quad e\tilde{H}^{\mu\nu}_{i^\bullet j^\bullet} = \partial L / \partial G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu}$$

(мы учли, что $B^{i^\bullet j^\bullet}_\mu$ входит в лагранжиан лишь через $G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu}$). Тождество Бьянки имеет вид $\partial_\mu (e\tilde{G}^{\mu\nu}_{i^\bullet j^\bullet}) = 0$. Вследствие этого можно ожидать, что $\mathcal{F}_{\mu\nu} = (G^{i^\bullet j^\bullet}_{\mu\nu}, H_{\mu\nu i^\bullet j^\bullet})$ будет принадлежать векторному представлению группы E_7 с размерностью 56. Поскольку $H_{\mu\nu i^\bullet j^\bullet}$ есть функции полей $G^{ij}_{\mu\nu}$ и скалярных полей, должно существовать соотношение между $\mathcal{F}$ и матрицей, опи-

сывающей скалярные поля $\mathcal{C}$ (или метрикой $\mathcal{R} = \mathcal{C}^T\mathcal{C}$, инвариантной относительно ожидаемой локальной группы инвариантности $SU(8)$). Простейшее ковариантное соотношение такого рода имеет вид $\Omega\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{R}\mathcal{F}$. Так как матрицу $\mathcal{F}$ мы знаем, этим соотношением определяется матрица $\mathcal{R}$ через исходные скалярные поля $S^{i'j'}$ и A_{abc}. Находим

$$\mathcal{R} = \mathcal{C}_+^T \mathcal{P}_- \mathcal{C}_+ ,$$

где

$$\mathcal{C}_+ = \begin{pmatrix} \mathcal{C}^{[a'}_{[i'} \mathcal{C}^{b']}_{j']} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}^{[i'}_{[a'} \mathcal{C}^{j']}_{b']} \end{pmatrix}, \tag{3.11}$$

а $\mathcal{P}_-$ зависит лишь от A_{abc} и вычисляется на основе выражения для $N_{a'b'c'd'}$. Определяя

$$A_{a'b'c'd'} = 4A_{[a'b'c'}\delta^8_{d']} , \tag{3.12}$$

$$*A^{a'b'c'd'} = \frac{1}{24}\varepsilon^{a'b'c'd'e'f'g'h'} A_{e'f'g'h'}$$

(тензор $*A$ равен нулю, если один из его индексов принимает значение 8) и принимая соглашение, что при определении произведения матриц размера 28×28 все свертки производятся по антисимметризованным парам индексов, получаем

$$\mathcal{P}_- = \mathcal{P}_-^T = \begin{pmatrix} X & Z \\ Z^T & Y \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

где $X = X^T$, $Y = Y^T$ и Z – матрицы 28×28, которые даются выражениями

$$\begin{aligned} X &= 1 + A^2 + \frac{1}{2}\, {*A}A + \frac{1}{2} A\, {*A} + \frac{1}{4} A (A^*)^2 A , \\ Z &= A + {*A} + \frac{1}{2} A^2\, {*A} + \frac{1}{2} A ({*A})^2 + \frac{1}{6} A\, {*A}A + \frac{1}{12} A\, {*A}A^2\, {*A}, \\ Y &= 1 + ({*A})^2 + \frac{1}{2} A\, {*A} + \frac{1}{2}\, {*A}A + \frac{1}{4}\, {*A}A^2\, {*A} . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Теперь необходимо доказать, что $\mathcal{R}$ есть матрица из группы E_7. Так как $\mathcal{C}_+^T$ и $\mathcal{C}_+$ принадлежат группе E_7, достаточно лишь показать, что $\mathcal{P}_-$ – тоже элемент группы E_7. Для этого мы докажем, что $\mathcal{P}_- = \mathcal{C}_-^T \mathcal{C}_-$, где

$$\mathcal{C}_- = \exp\begin{pmatrix} 0 & *A^{a'b'c'd'} \\ A_{a'b'c'd'} & 0 \end{pmatrix} \equiv \exp V . \tag{3.15}$$

Из этой записи явствует, что $\mathcal{C}_- \in E_7$. Для доказательства равенства $\mathcal{P}_- = \mathcal{O}_-^T \mathcal{C}_-$ достаточно заметить, что определенные выше тензоры A и $^*A$ удовлетворяют соотношению $^*AA^*A = 0$, так что матрица V является нильпотентной: $V^4 = 0$. Поэтому разложение экспоненты V в ряд содержит лишь конечное число членов и является полиномиальным по A. Вводя обозначение $\mathcal{C} = \mathcal{C}_-\mathcal{C}_+$, мы находим, что $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{C}\mathcal{F}_{\mu\nu} = \Omega\widetilde{\mathcal{C}\mathcal{F}_{\mu\nu}}. \tag{3.16}$$

Если матрица $\mathcal{R}$ описывает скалярные поля, то должно выполняться соотношение

$$L_S = -\gamma e \operatorname{Tr}(\partial_\mu \mathcal{R} \partial^\mu \mathcal{R}^{-1}). \tag{3.17}$$

Раскрывая правую часть как функцию полей $\mathcal{C}^{a}_{i}$ и A_{ijk}, можно убедиться, что она действительно совпадает с лагранжианом скаляров при $\gamma = 1/192$. Используя репер $\mathcal{C}$, мы можем также переписать лагранжиан в виде, явно демонстрирующем локальную $SU(8)$-инвариантность

$$L_S = \frac{e}{48} \operatorname{Tr}([D_\mu \mathcal{C}\mathcal{C}^{-1}]^2). \tag{3.18}$$

Полный лагранжиан бозонов теперь принимает простую форму

$$L_B = -\frac{e}{4} R - \frac{e}{192} \operatorname{Tr}(\partial_\mu \mathcal{R} \partial^\mu \mathcal{R}^{-1}) + \frac{1}{16} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G^{ij}_{\mu\nu} H_{\rho\sigma ij}, \tag{3.19}$$

где $H_{\rho\sigma ij}$ определен через $G^{ij}_{\mu\nu}$ и $\mathcal{R}$ соотношением

$$\Omega\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{R}\mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \begin{pmatrix} G^{ij}_{\mu\nu} \\ H_{\mu\nu ij} \end{pmatrix}, \tag{3.20}$$

$$\widetilde{H}^{\mu\nu}_{ij} = \frac{1}{2e} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} H_{\rho\sigma ij} = \frac{1}{e} \partial \mathcal{L}_B / \partial G^{ij}_{\mu\nu},$$

и причем $\mathcal{R}$ есть симметричная матрица 56×56, принадлежащая группе E_7.

Докажем теперь E_7-инвариантность уравнений движения, следующих из этого лагранжиана, который может быть представлен в общем виде так:

$$L_B = L_{E_7} + \frac{1}{16} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G^{ij}_{\mu\nu} H_{\rho\sigma ij}(B^{ij}_\mu, g_{\mu\nu}, \mathcal{R}), \tag{3.21}$$

где L_{E_7} – часть, инвариантная относительно группы E_7.

1. Уравнения движения для B^{ij}_μ совместно с тождествами Бьянки для $G_{\mu\nu}$

$$\partial_\mu(e\widetilde{H}^{\mu\nu}_{ij}) = 0, \quad \partial_\mu(e\widetilde{G}^{\mu\nu ij}) = 0 \tag{3.22}$$

могут быть записаны в виде $\partial_\mu(e\widetilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu}) = 0$, ковариантном относительно группы E_7.

2. Остальные поля принадлежат определенным представлениям группы E_7. Обозначим их через φ^N. Можно в общем случае показать [36], что при инфинитезимальных преобразованиях группы E_7 [подгруппы группы $Sp(56)$] выполняется соотношение

$$\Delta\left(\frac{\delta L}{\delta\varphi^N}\right) = -\frac{\delta(\Delta\varphi^M)}{\delta\varphi^N}\frac{\delta L}{\delta\varphi^M} \tag{3.23}$$

и, следовательно, если $\delta L/\delta\varphi^M = 0$, мы имеем $\Delta(\delta L/\delta\varphi^M) = 0$.

Тем самым доказана E_7-инвариантность бозонной теории. Ее локальная $SU(8)$-симметрия проявляется в том, что лагранжиан зависит от инвариантной метрики $\mathfrak{R}$ (подобно тому, как локальная лоренцева инвариантность группы $SO(3, 1)$ "скрыта" в метрике $g_{\mu\nu}$, $SU(8)$ "скрыта" в $\mathfrak{R}$).

Д. Группы $SO(7)$, $SO(8)$, $SU(8)$ и $E_{7(+7)}$

Прежде чем переходить к взаимодействию с фермионами, нужно найти для группы E_7 базис, позволяющий легко выделить подгруппу $SU(8)$. Этот базис связан с пространством алгебры Клиффорда для $SO(7)$ и позволяет также установить два возможных вложения $SO(7)$ в $SO(8)$.

1. Алгебра Клиффорда для группы $SO(7)$ и алгебра Ли группы $SO(8)$

Выберем 7 матриц $(\Gamma^a)_A{}^B$ ($a = 1, \ldots, 7$, $A = 1, \ldots, 8$), образующих алгебру Клиффорда для группы $SO(7)$:

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{1}. \tag{3.24}$$

Матрицы Γ^a выберем действительными и антисимметричными. Они порождают антисимметризованные произведения $\Gamma^{a_1 \ldots a_k}$. Матрицы Γ^{ab} являются антисимметричными, а Γ^{abc} – симметричными. Вместе с Γ^a они образуют полный базис в алгебре матриц 8×8. Остальные матрицы связаны с ними соотношениями дуальности

$$\Gamma^{abcdefg} = \varepsilon^{abcdefg}\mathbb{1}, \quad \Gamma^{abcd} = -\frac{1}{6}\varepsilon^{abcdefg}\Gamma^{efg}. \tag{3.25}$$

Матрицы Γ^a и Γ^{ab} удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} &[\Gamma^{ab}, \Gamma^{cd}] = -8\eta^{[a}{}_{[c}\Gamma^{b]}{}_{d]}, \\ &[\Gamma^{ab}, \Gamma^c] = -2(\eta^{ac}\Gamma^b - \eta^{bc}\Gamma^a), \\ &[\Gamma^a, \Gamma^b] = 2\Gamma^{ab}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Следовательно, определяя $\Gamma^{a8} = -\Gamma^a$ ($\eta^{88} = -1$) и вводя обозначения $a' = (a, 8)$, мы получаем

$$[\Gamma^{a'b'}, \Gamma^{c'd'}] = -8\eta^{[a'}{}_{[c'}\Gamma^{b']}{}_{d']}. \tag{3.27}$$

Это – соотношения для генераторов алгебры Ли группы $SO(8)$: индекс a отве-

чает векторному представлению, а индекс A – спинорному представлению группы $SO(8)$. Преобразование группы $SO(8)$ вида $\delta x^{a'} = \Lambda^{a}{}_{b'} x^{b'}$ ($\Lambda^{a}{}_{b'}$ – антисимметричная матрица) в спинорном представлении имеет вид

$$\delta x^A = \frac{1}{4} (\Gamma^{a'b'})_A{}^B \Lambda_{a'b'} x^B \equiv \Lambda^A{}_B x^B . \qquad (3.28)$$

И здесь $\Lambda^A{}_B$ – антисимметричная матрица 8×8 (правда, отличная от $\Lambda_{a'b'}$). Но эти два 8-мерных представления $SO(8)$ не эквивалентны: не существует преобразования $x^A = Z^A{}_{a'} x^{a'}$, которое означало бы связь между $\Lambda^{a'b'}$ и $\Lambda_H{}^B$. В то же время для антисимметричного представления группы $SO(8)$ с размерностью 28, задаваемого соотношением $x^{a'b'} = -x^{b'a'}$, действием группы $SO(8)(\Lambda_a{}^{b'})$ на $x^{a'b'}$ генерируется преобразование из "векторного" представления группы $SO(8)$ (с параметром $\Lambda_A{}^B$), действующее на $x^{AB} = \frac{1}{4}(\Gamma^{a'b'})_A{}^B x^{a'b'}$.

2. $SU(8)$-базис для группы E_7

Базис, связанный с подгруппой $SU(8)$, определяется с помощью x^{ij} и y_{ij} следующим образом:

$$Z_{AB} = \frac{1}{4} (\Gamma^{ij})_A{}^B (x^{ij} + i y_{ij}) / \sqrt{2} = - Z_{BA} .$$

Используя различные свойства Γ-матриц, можно показать, что инфинитезимальные преобразования группы E_7 в этом базисе имеют вид

$$\delta Z_{AB} = \Lambda_A{}^C Z_{CB} + \Lambda_B{}^C Z_{AC} + \Sigma_{ABCD} \bar{Z}^{CD} , \qquad (3.29)$$

где $\bar{Z}^{CD}$ – матрица, комплексно сопряженная матрице Z_{CD}, $\Lambda_A{}^B$ – бесследовая антиэрмитовая матрица 8×8, а Σ_{ABCD} – полностью антисимметричный тензор, удовлетворяющий соотношению самодуальности

2475

$$\Sigma_{ABCD} = \frac{\eta}{4!} \varepsilon_{ABCDEFGH} \bar{\Sigma}^{EFGH} \quad (\eta = \pm 1). \qquad (3.30)$$

Билинейный инвариант теперь записывается с помощью симплектической матрицы $\Omega^{\bullet}$:

$$Z_{1AB} \bar{Z}_2^{AB} - Z_{2AB} \bar{Z}_1^{AB}, \quad \Omega^{\bullet} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} . \qquad (3.31)$$

Подгруппа $SU(8)$ выделяется условием $\Sigma = 0$, т.е. образована матрицами группы E_7, которые удовлетворяют соотношению $[X^{\bullet}, \Omega^{\bullet}] = 0$, или $X^{\bullet} X'^{\dagger} = 1$ (где мы учли, что для $X^{\bullet} \in E_7$ выполняется соотношение $X^{\bullet -1} = -\Omega' X'^{\dagger} \Omega'$).

3. Преобразование полученных ранее результатов к новому базису

Матрица $\mathcal{V}^{\bullet}$, описывающая скалярные поля, теперь примет вид

$$\mathcal{V}^{\bullet} = \begin{pmatrix} U_{AB}{}^{MN} & V_{ABMN} \\ \bar{V}^{ABMN} & \bar{U}^{AB}{}_{MN} \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Ввиду того, что $\partial_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1}$ есть элемент алгебры Ли группы E_7, мы имеем

$$\partial_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1} = \begin{pmatrix} 2Q_{\mu[A}{}^{[C}\delta_{B]}{}^{D]} & P_{\mu ABCD} \\ \bar{P}_\mu^{ABCD} & 2\bar{Q}_\mu{}^{[A}{}_{[C}\delta^{B]}{}_{D]} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

где

$$P_{\mu ABCD} = \frac{\eta}{24}\,\varepsilon_{ABCDEFGH}\,\bar{P}_\mu^{EFGH}$$

Разбиение на "продольную" и "поперечную" части по отношению к $SU(8)$ теперь очевидно:

$$\left(\partial_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1}\right)_{\parallel} = 2\begin{pmatrix} Q_{\mu[A}{}^{[C}\delta_{B]}{}^{D]} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{\mu[C}{}^{[A}\delta^{B]}{}_{D]} \end{pmatrix}, \tag{3.34}$$

$$\left(\partial_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1}\right)_{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & P_{\mu ABCD} \\ \bar{P}_\mu^{ABCD} & 0 \end{pmatrix} = D_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1}. \tag{3.35}$$

Мы заключаем, что Q_μ и P_μ инвариантны относительно группы E_7, т.е. относительно преобразований

$$\mathcal{V}^{\bullet} \to S(x)\mathcal{V}^{\bullet}G, \quad S(x) \in SU(8), \quad G \in E_7, \tag{3.36}$$

причем Q_μ преобразуется как калибровочное поле для локальной группы $SU(8)$, а P_μ – как ковариантный тензор этой группы.

Векторное поле переопределим, согласно равенству $B_\mu{}^{MN} = 1/4(\Gamma^{ij})_M{}^N B_\mu{}^{ij}$, с соответствующими выражениями для $G_{\mu\nu}^{MN}$ и $H_{\mu\nu MN}$. Тогда матрица $\mathcal{F}$ примет вид

$$\mathcal{F}^{\bullet}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} G_{\mu\nu}{}^{MN} + iH_{\mu\nu MN} \\ G_{\mu\nu}{}^{MN} - iH_{\mu\nu MN} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}_{\mu\nu MN} \\ \bar{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{MN} \end{pmatrix}. \tag{3.37}$$

Условие $\mathcal{O}^{\bullet}\mathcal{F}^{\bullet}_{\mu\nu} = \Omega^{\bullet}\mathcal{O}^{\bullet}\widetilde{\mathcal{F}}^{\bullet}_{\mu\nu}$ можно записать следующим образом:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu AB} = i\widetilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}\,, \tag{3.38}$$

где мы положили $\mathcal{O}^{\bullet}\mathcal{F}^{\bullet} = \begin{pmatrix}\mathcal{F}_{AB}\\ \bar{\mathcal{F}}_{AB}\end{pmatrix}$. Выражение для бозонного лагранжиана таково:

$$\mathfrak{L}_B = -\frac{e}{4}R + \frac{e}{24}P_{\mu ABCD}\bar{P}_{\nu}^{ABCD}g^{\mu\nu} + \frac{1}{16}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\mu\nu}{}^{MN}H_{\rho\sigma MN} \tag{3.39}$$

Е. Взаимодействие с фермионами

1. Определим преобразования группы $SU(8)$ на майорановских спинорах:

$$\delta\lambda_A = (\Lambda'^{\ B}_A + i\gamma_5\Lambda''^{\ B}_A)\lambda_B\,, \tag{3.40}$$

где $\Lambda_A{}^B = \Lambda'^{\ B}_A + i\Lambda''^{\ B}_A$ принадлежит алгебре Ли группы $SU(8)$ (т.е. Λ' и Λ'' – действительные матрицы, первая – антисимметричная, а вторая – симметричная). В результате такого преобразования сохраняется свойство майорановости спиноров λ^A. Другой, эквивалентный путь состоит в использовании вейлевских спиноров

$$\lambda_A^{(R)} = \frac{1+\gamma_5}{2}\lambda_A\,,\quad \lambda^A{}_{(L)} = \frac{1-\gamma_5}{2}\lambda_A\,, \tag{3.41}$$

$$\delta\lambda_A^{(R)} = \Lambda_A{}^B\lambda_B{}^{(R)},\ \delta\lambda^A{}_{(L)} = \Lambda^A{}_B\lambda^B{}_{(L)},\ \Lambda^A{}_B = \bar{\Lambda}_A{}^B\,.$$

2. Как мы уже видели выше, из размерной редукции следует, что члены взаимодействия для фермионов могут быть записаны с помощью трех функций $Q^{(0)}{}_{\mu A}{}^B$, $P^{(0)}_{\mu ABCD}$ и $\mathcal{F}^{(0)}_{AB}$, зависящих от полей g^{ij}, φ^i, A_{ijk}, $B_\mu{}^{ij}$ и $B_\mu{}^i$. Выразим теперь величины $Q_{\mu A}{}^B$ и $P_{\mu ABCD}$, определенные в п. Д через скалярную матрицу $\mathcal{O}$ (или $\mathcal{O}^{\bullet}$) из п. Г. С точностью до замены i на $i\gamma_5$ находим

$$Q_{\nu A}{}^B = Q^{(0)\,B}_{\nu A}\,,\quad P_{\mu ABCD} = P^{(0)}_{\mu ABCD}\,. \tag{3.42}$$

Этим доказана локальная $SU(8)$-инвариантность фермионных членов (отметим, что взаимодействия $\psi_{\mu A}$ и λ_{ABC} с $Q_{\nu A}{}^B$ различаются множителем 3).

Взаимодействие фермионов с векторными полями зависит лишь от напряженности

$$\mathcal{F}^{(0)}_{AB} = \gamma^{\mu\nu}\mathcal{F}^{(0)}_{\mu\nu AB} \tag{3.43}$$

(всюду с заменой i на $i\gamma_5$). Поскольку $\gamma_{\mu\nu}$ удовлетворяет равенству

$$\widetilde{\gamma}_{\mu\nu} = -i\gamma_5\gamma_{\mu\nu}\,, \tag{3.44}$$

с фермионами фактически взаимодействует лишь часть $\mathcal{F}^{(0)\mu\nu}$, для которой вы-

полняется равенство $\mathfrak{F}^{(0)\mu\nu}{}_{AB} = i\tilde{\mathfrak{F}}^{(0)\mu\nu}{}_{AB}$. Выражая $\mathfrak{F}_{AB\,\mu\nu}$ из п. Д через $\mathcal{V}^*(\mathcal{V})$ из п. Г, находим

$$\mathfrak{F}_{\mu\nu AB} = \mathfrak{F}^{(0)}_{\mu\nu AB} . \tag{3.45}$$

3. Нам следует учесть, что теперь действительный вектор относительно группы E_7 есть уже не $\mathfrak{F}_{\mu\nu}$, а $\mathfrak{F}_{\mu\nu}{}^F = (G_{\mu\nu}{}^{MN}, H^F_{\mu\nu MN})$, где $H^F_{\mu\nu MN}$ содержит фермионные члены. Напряженность $\mathfrak{F}^F_{\mu\nu}$ теперь удовлетворяет не равенству $\mathfrak{F}_{\mu\nu}{}^F = i\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}{}^F$, а модифицированной связи $\hat{\mathfrak{F}}_{\mu\nu} = i\,\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu\nu}$, где

$$\hat{\mathfrak{F}}_{\mu\nu AB} = \mathfrak{F}^F_{\mu\nu AB} + 2\sqrt{2}\left\{\bar{\psi}^{(L)}{}_{[\mu[A}\psi^{(R)}{}_{B]\nu]} - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\bar{\psi}^{(R)}{}_{[\mu C}\gamma_{\nu]}\lambda_{ABC} + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta}{288}\,\varepsilon_{ABCDEFGH}\,\bar{\lambda}^{CDE}{}_{(R)}\gamma_{\mu\nu}\lambda^{FGH}{}_{(L)}\right\}. \tag{3.46}$$

4. Все члены четвертого порядка по полям не найдены в явном виде, но они полностью определяются процедурой размерной редукции. Мы сделали предположение, что эти члены могут быть получены "минимальной заменой"

$$P_{\mu ABCD} \to \frac{1}{2}\left(P_{\mu ABCD} + \hat{P}_{\mu ABCD}\right),\ \mathfrak{F}_{\mu\nu AB} \mapsto \frac{1}{2}\left(\mathfrak{F}_{\mu\nu AB} + \hat{\mathfrak{F}}_{\mu\nu AB}\right). \tag{3.47}$$

Что касается связности $\omega_{\mu\alpha\beta}$, то она определяется своими уравнениями движения. Мы показали, что все члены с ψ^4, следующие из такой замены, совпадают с полученными ранее. То же самое справедливо для членов 4-го порядка по скалярам. Мы убедились также в том, что тривиальный переход от теории с $N=8$ к супергравитации с $N = 4$ приводит к корректным членам 4-го порядка.

Поскольку полученный в итоге лагранжиан имеет ту же структуру, что и лагранжиан общего типа, рассматривавшийся в п. Г, доказательство E_7-инвариантности данной теории проводится точно таким же образом.

Ж. $E_7\,/\,SU(8)$-супергравитация

Теперь мы можем написать окончательное выражение для лагранжиана:

$$\mathfrak{L} = -\frac{e}{4}R(\omega, e) + \frac{1}{2}\,\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\bar{\psi}_{\mu A}\gamma_\sigma\gamma_5(\delta_A{}^B D_\nu(\omega) - Q_{\nu A}{}^B)\psi_{\rho B} +$$

$$+ \frac{e}{8}\,G^{MN}_{\mu\nu}\tilde{H}^{\mu\nu(F)}{}_{MN}(B, \mathcal{V}, \psi, \lambda) + \frac{ie}{12}\,\bar{\lambda}_{ABC}\gamma^\mu(\delta_A{}^D D_\mu(\omega) - 3Q_{\mu A}{}^D)\lambda_{BCD} +$$

$$+ \frac{e}{24}\,P_{\mu ABCD}\,\bar{P}^{ABCD}_\nu g^{\mu\nu} + \frac{e}{6\sqrt{2}}\,\bar{\psi}_{\mu A}\gamma^\nu\gamma^\mu(\bar{P}^{ABCD}_\nu + \hat{\bar{P}}^{ABCD}_\nu)\lambda_{BCD} +$$

$$+\frac{e}{8\sqrt{2}}\{\bar{\psi}_{\mu A}\gamma^{[\nu}\hat{\mathcal{F}}_{AB}\gamma^{\mu]}\psi_{\nu B}-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{\mu C}\hat{\mathcal{F}}_{AB}\gamma^{\mu}\lambda_{ABC}-$$

$$-\frac{\eta}{72}\varepsilon^{ABCDEFGH}\bar{\lambda}_{ABC}\hat{\mathcal{F}}_{DE}\lambda_{FGH}\},\qquad(3.48)$$

где

$$\hat{P}_{\mu ABCD}=P_{\mu ABCD}+2\sqrt{2}[\bar{\psi}_{\mu}{}^{(L)}{}_{[A}\lambda^{(R)}{}_{BCD]}+$$

$$+\frac{\eta}{24}\varepsilon_{ABCDEFGH}\bar{\psi}_{\mu}{}^{E}{}_{(R)}\lambda^{FGH}{}_{(L)}],$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{AB}=\gamma^{\mu\nu}\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB},\qquad(3.49)$$

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}=\mathcal{F}^{F}{}_{\mu\nu AB}+\sqrt{2}\Big\{\bar{\psi}_{[\mu}{}^{(R)}{}_{[A}\psi_{B]}{}^{(L)}{}_{\nu]}-\frac{i}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_{[\mu}{}^{(L)C}\gamma_{\nu]}\lambda_{ABC}{}^{(R)}+$$

$$+\frac{\eta}{288}\varepsilon_{ABCDEFGH}\bar{\lambda}_{(L)}{}^{CDE}\gamma_{\mu\nu}\lambda^{FGH}_{(R)}\Big\}.$$

Напряженность $\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}$ (а значит, и $\mathcal{F}^{F}{}_{\mu\nu AB}$) определяется условием

$$\hat{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}=i\tilde{\hat{\mathcal{F}}}_{\mu\nu AB}\qquad(3.50)$$

Отметим, что в $\mathfrak{L}$ часть взаимодействий с $\mathcal{F}_{\mu\nu AB}$ содержится в члене $G\widetilde{H}^{(F)}$, так что $H^{(F)}$, как и должно быть, удовлетворяет соотношению

$$eH^{(F)}_{\mu\nu MN}=-(\partial\widetilde{\mathfrak{L}}/\partial G_{\mu\nu MN}).\qquad(3.51)$$

Перечислим теперь все симметрии теории: а) теория инвариантна относительно репараметризаций в 4 измерениях и локальных лоренцевых $SO(3,1)$-преобразований; б) действие теории инвариантно относительно локальных $SU(8)$-преобразований спинорных и скалярных полей; в) уравнения движения инвариантны относительно глобальных $E_{7(+7)}$-преобразований, действующих на напряженности векторных полей и скалярные поля; г) теория инвариантна относительно следующих преобразований суперсимметрии:

$$\delta_S e^{\alpha}{}_{\mu}=-i\bar{\varepsilon}_A\gamma^{\alpha}\psi_{\mu A},\qquad(3.52)$$

$$\delta_S\mathcal{V}\mathcal{V}^{-1}=-2\sqrt{2}\begin{pmatrix}0 & X_{ABCD}\\ \bar{X}^{ABCD} & 0\end{pmatrix},$$

где

$$X_{ABCD}=\bar{\varepsilon}_{[A}{}^{(L)}\lambda^{(R)}{}_{BCD]}+\frac{\eta}{24}\varepsilon_{ABCDEFGH}\bar{\varepsilon}^{E}_{(R)}\lambda^{FGH}_{(L)}.\qquad(3.53)$$

Вариацию $\delta_S B_\mu{}^{MN}$ можно найти из соотношения

$$\delta_S \begin{pmatrix} B_\mu{}^{MN} + iC_{\mu MN} \\ B_\mu{}^{MN} - iC_{\mu MN} \end{pmatrix} = -2\sqrt{2}\mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} \bar\varepsilon^{(L)}_{[A}\psi^{(R)}_{\mu B]} - \frac{i\sqrt{2}}{4}\bar\varepsilon^{C}_{(R)}\gamma_\mu\lambda^{(R)}_{ABC} \\ \bar\varepsilon^{[A}_{(R)}\psi^{B]}_{\mu(L)} - \frac{i\sqrt{2}}{4}\bar\varepsilon^{(L)}_{C}\gamma_\mu\lambda^{ABC}_{(L)} \end{pmatrix}, \tag{3.54}$$

Здесь $C_{\mu MN}$ – дуальный потенциал, определенный лишь на массовой оболочке. Вариации фермионных полей имеют вид

$$\delta_S\psi_{\mu A}^{(R)} = (D_\mu(\omega)\delta_A{}^B - Q_{\mu A}{}^B)\varepsilon^{(R)}_B - \frac{i}{4\sqrt{2}}\hat{\mathcal{F}}_{AB}\gamma_\mu\varepsilon^B_{(L)} +$$

$$+\frac{i}{4}\bar\lambda^{(L)}_{ABC}\gamma^\alpha\lambda^{DBC}_{(L)}\gamma_\alpha\gamma_\mu\varepsilon^{(R)}_D - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar\psi^B_{\mu(R)}\gamma^\alpha\lambda^{(R)}_{ABC}\varepsilon^C_{(L)}, \tag{3.55}$$

$$\delta_S\lambda^{(R)}_{ABC} = -i\sqrt{2}\hat{P}_{\mu ABCD}\gamma^\mu\varepsilon^D_{(L)} + \frac{3}{4}\hat{\mathcal{F}}_{[AB}\varepsilon^{(R)}_{C]}. \tag{3.56}$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что $\hat{P}_{\mu ABCD}$, $\hat{\mathcal{F}}_{AB}$ и $Q_{\mu A}{}^B$ являются суперковариантными величинами.

На самом деле схема построения лагранжиана могла бы быть следующей. Сделав предположение о симметриях теории (локальной $SU(8)$ и глобальной E_7), мы могли бы восстановить структуру лагранжиана и законов суперпреобразований с точностью до нескольких численных коэффициентов, которые затем можно было бы найти из требования суперсимметрии теории. В следующем пункте параграфа мы продемонстрируем, как подобное построение осуществляется в случае супергравитации с $N = 8$ в 5 измерениях.

3. Симметричная калибровка

Калибровка (или, что то же самое, параметризация), которая приводит к привычному $SO(8)$-симметричному виду лагранжиана, называется симметричной калибровкой. Одновременно это есть единственная калибровка, в которой группа $SU(8)$ действует линейно на компоненты репера $\mathcal{V}$, описывающего скалярные поля. С помощью калибровочного $SU(8)$-преобразования мы можем обеспечить выполнение условия

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^+.$$

В этой калибровке $\mathcal{V}$ генерируется частью группы $E_{7(7+)}$, "перпендикулярной" группе $SU(8)$:

$$\mathcal{V} = \exp X,$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & w_{ABCD} \\ \bar{w}^{ABCD} & 0 \end{pmatrix}, \quad w_{ABCD} = \frac{\eta}{24}\varepsilon_{ABCDEFGH}\bar{w}^{EFGH}. \tag{3.57}$$

Тогда $\mathcal{V}^{\bullet}$ записывается так:

$$\mathcal{V}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\sqrt{w\bar{w}} & w\,\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{\bar{w}w}}{\sqrt{\bar{w}w}} \\ \bar{w}\,\dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{w\bar{w}}}{\sqrt{w\bar{w}}} & \operatorname{ch}\sqrt{\bar{w}w} \end{pmatrix}, \tag{3.58}$$

где w и $\bar{w}$ – матрицы 28×28.

Здесь полезно ввести на группе $E_7 / SU(8)$ так называемые неоднородные координаты y.

Ход наших рассуждений фактически не зависит от конкретного фактор-пространства G/H; предъявляется единственное требование: группа H должна быть максимальной компактной подгруппой группы G, т.е. иными словами, пространство G/H должно быть симметрическим.

Положим

$$y_{AB,\,CD} = \left(w\,\frac{\operatorname{th}\sqrt{\bar{w}w}}{\sqrt{\bar{w}w}}\right)_{AB,\,CD}, \tag{3.59}$$

так что новые переменные ограничены: $\| y \| < 1$. Тогда

$$\mathcal{V}^{\bullet} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1-y\bar{y}}} & y\,\dfrac{1}{\sqrt{1-\bar{y}y}} \\ \bar{y}\,\dfrac{1}{\sqrt{1-y\bar{y}}} & \dfrac{1}{\sqrt{1-\bar{y}y}} \end{pmatrix}. \tag{3.60}$$

Действие элементов группы $E_{7(+7)}$ на y является простым, и этим объясняется название координат y. При умножении на постоянную матрицу группы E_7 мы имеем

$$\mathcal{V}(y)\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U(y) & 0 \\ 0 & U^*(y) \end{pmatrix}\mathcal{V}(y^{\bullet}), \tag{3.61}$$

где U – матрица группы $SU(8)$, а $y^{\bullet} = (A + yC)^{-1}(B + yD)$. Локальное $SU(8)$-преобразование, задаваемое матрицей U, определяется из условия, что $\mathcal{V}(y^{\bullet})$ есть симметричная матрица (соответствующий матрице U множитель может быть поглощен калибровочным преобразованием).

Отметим, что, если не считать прямого определения, не существует простого способа задания тензора y_{ABCD}; в частности, этот тензор не является антисимметричным по A, B, C, D. Не составляет труда выразить через y матрицу $\partial_\mu \mathcal{V}^{\bullet}\mathcal{V}^{\bullet\,-1}$ и найти P_μ и Q_μ. В частности, мы получаем

$$P_{\mu ABCD} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-y\bar{y}}}\,\partial_\mu y\,\frac{1}{\sqrt{1-\bar{y}y}}\right)_{AB,\,CD}, \tag{3.62}$$

так что кинетический член скалярных полей принимает простую форму

$$P_{\mu ABCD}\bar{P}^{\mu ABCD} = \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{1-y\bar{y}}\,\partial_\mu y\,\frac{1}{1-\bar{y}y}\,\partial_\mu \bar{y}\right). \qquad (3.63)$$

В этой калибровке уравнение связи $\mathcal{F}_{\mu\nu AB} = i\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu AB}$ имеет решение $H_{\mu\nu AB} = N_{AB,CD}\tilde{G}_{\mu\nu}^{CD}$ (обозначения теперь согласованы с ковариантностью лишь относительно $SO(8)$, а не $SU(8)$), где

$$N_{AB,CD} = \left(\frac{\mathbb{1}+y}{\mathbb{1}-y}\right)_{AB,CD}, \quad \mathbb{1}_{AB,CD} = \delta_{A[C}\delta_{D]B} \qquad (3.64)$$

(напомним, что действительная часть матрицы N должна быть умножена на $1/2\,(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$, а минимальная – на $(1/2\,e)\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$). Тогда получаем

$$\mathcal{F}_{\mu\nu AB} = \sqrt{2}\left(\sqrt{1-\bar{y}y}\,\frac{1}{1-y}\right)_{AB,CD} G_{\mu\nu}^{CD}. \qquad (3.65)$$

Отметим также, что необходима определенная модификация законов суперобразований, так как специфические калибровочные преобразования, которые мы выполнили, чтобы привести $\mathcal{V}^{*}$ в симметричную калибровку, зависят от скалярных полей.

§ 4. Скрытые симметрии супергравитаций с N спинорными зарядами в D измерениях

Мы установили, что супергравитация с $N = 8$ в 4 измерениях обладает нелинейно реализованной некомпактной глобальной инвариантностью, а также скрытой локальной инвариантностью. Такие свойства справедливы для всех теорий супергравитации. Укажем общий принцип поиска подобных симметрий. Мы будем предполагать, что скаляры всегда описываются координатами некоторого фактор-пространства G/H. Группа H, изоморфная максимальной группе, линейно реализованной на физических состояниях, есть группа инвариантности алгебры суперсимметрии. Например, группа H – это группа $SU(N)$ или $U(N)$ в 4 измерениях и группа $USp(2N)$ в 5 измерениях. Размерность группы G в точности равна сумме размерности группы H и числа физических скалярных полей. Для того чтобы все скаляры имели правильный знак кинетического члена, группа H должна быть максимальной компактной подгруппой группы G. Этим фиксируется сигнатура метрики Киллинга для группы G. Естественно ожидать, что все бозонные поля, кроме скалярных, будут синглетами локальной группы, что группа G фактически реализуется лишь на массовой оболочке, что фермионные поля являются синглетами некомпактной группы G и что скалярные поля преобразуются относительно обеих групп и могут быть объединены в некоторую матрицу "репера". Все эти соображения почти однозначно фиксируют группу G. Полезным руководящим принципом является также принцип соответствия при уменьшении N или увеличении D.

Таблица 4

	N				
	8	7	6	5	4
Спин 2	1	1	1	1	1
Спин 3/2	8	7 + 1	6	5	4
Спин 1	28	21 + 7	15 + 1	10	6
Спин 1/2	56	35 + 21	20 + 6	10 + 1	4
Спин 0	70	35 + 35	15 + 15	5 + 5	1 + 1
Глобальная группа,	$E_{7(+7)}$	$E_{7(+7)}$	$SO^*(12)$	$SU(5, 1)$	$SU(4) \times SU(1,1)$
ранг	7	7	6	5	4
Локальная группа,	$SU(8)$	$SU(8)$	$U(6)$	$U(5)$	$U(4)$
ранг	7	7	6	5	4

А. Расширеннные теории супергравитации в 4 измерениях

Мы начнем с теории с $N = 8$ и путем согласованных "усечений" придем к теориям супергравитации с $N < 8$. При этом нам придется учесть условие CPT-инвариантности. В результате мы восстановим глобальную $SU(1,1)$-инвариантность супергравитации с $N = 4$. Эта теория допускает формулировку с глобальной $SU(1,1) \times SU(4)$-инвариантностью уравнений движения и локальной $U(4)$-инвариантностью действия.

При $N \leqslant 3$ скалярные поля отсутствуют, так что обе – глобальная и локальная – группы симметрий изоморфны группе $U(N)$ и переопределением полей могут быть сведены к известной глобальной $U(N)$-инвариантности.

Состав полей и симметрии теорий супергравитации с $N < 8$ и $D = 4$ указан в табл. 4.

Б. Максимальные расширенные теории супергравитации в D измерениях

Все максимальные теории супергравитации в D измерениях ($D < 11$) могут быть получены путем размерной редукции из супергравитации с $D = 11$ и $N = 1$. Чтобы выявить максимальные симметрии этих теорий (они имеют как минимум глобальную $SL(11 - D, R)$ и локальную $SO(11 - D)$ группы инвариантности), необходимо выполнить дуальные преобразования на тензорных полях, например:

$$
\begin{aligned}
&D = 7 \qquad && A_{\mu\nu\rho} \to B_{\mu\nu}, && \\
&D = 6 && A_{\mu\nu\rho} \to B_{\mu}, && \\
&D = 5 && A_{\mu\nu\rho} \to \varphi, \quad && A_{\mu\nu} \to B_{\mu}, \\
&D = 4 && A_{\mu\nu\rho} \to 0, && A_{\mu\nu} \to \varphi.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Таблица 5

	$D=9$	$D=8$	$D=7$	$D=6$	$D=5$	$D=4$	$D=3$
$e_\mu{}^a$	1	1	1	1	1	1	1
Ψ_μ	2	2	4	4	8	8	8
$A_{\mu\nu\rho}$	1	$\underset{\sim}{1}$	5	$\underset{\sim}{5}$	–	–	–
$A_{\mu\nu}$	2	3	5	$\underset{\sim}{5}$	–	–	–
A_μ	3	6	10	16	27	$\underset{\sim}{28}$	–
χ	4	6	16	20	48	56	128
Скаляры	3	7	14	25	42	70	128
Глобальная симметрия	$GL(2,R)$	$E_{3(+3)}$	$E_{4(+4)}$	$E_{5(+5)}$	$E_{6(+6)}$	$E_{7(+7)}$	$E_{8(+8)}$
Локальная симметрия	$SO(2)$	$SO(3)\otimes SO(2)$	$SO(5)$	$SO(5)\otimes SO(5)$	$USp(8)$	$SU(8)$	$SO(16)$

$E_{3(+3)} = SL(3,R)\otimes SL(2,R)$; $E_{4(+4)} = SL(5,R)$; $E_{5(+5)} = SO(5,5)$.

Глобальные преобразования группы G_D могут быть фактически реализованы на напряженностях тензорных полей, а не на самих полях. В этом случае G_D есть симметрия уравнений движения, а не лагранжиана (например, для $A_{\mu\nu\rho}$ при $D=8$, для $A_{\mu\nu}$ при $D=6$ и для A_μ при $D=4$). Если размерность D нечетна, G_D – обязательно симметрия лагранжиана. Состав полей и симметрии максимальных супергравитаций указан в табл. 5 [9, 41, 48].

Во всех измерениях, конечно, одно и то же число степеней свободы, а именно 128 бозонных и 128 фермионных. При $D = 3, \ldots, 8$ глобальная группа симметрии есть E_{11-D}. В работе [38] было высказано предположение, что возможна процедура, обратная размерной редукции, а именно процедура "дезинтеграции" групп симметрий. Дело в том, что в D измерениях произведение локальной группы на малую спиновую группу всегда есть максимальная подгруппа группы $SO(16)$. Аналогичное утверждение справедливо для групп глобальной инвариантности, т.е.

$$E_8 \supset E_{11-D} \otimes SL(D-2),\ SO(16) \supset H_D \otimes SO(D-2). \tag{4.2}$$

Скаляры описываются с помощью фактор-пространства E_{11-D}/H_D, а состояния гравитона на массовой оболочке – с помощью $SL(D-2)/SO(D-2)$.

Что касается двух измерений, то здесь алгебры G_D и H_D должны, по-

видимому, содержать бесконечное число генераторов, в частности, G_D будет аффинной группой $E_8^{(1)}$ ($\sim E_9$), ассоциированной с группой E_8 [39][1]).

B. Теории супергравитации в 5 измерениях

Симметрии 5-мерной теории являются инвариантностями лагранжиана, и этим упрощается его построение. Знание структуры супергравитации в 5 измерениях позволяет не только лучше понять соответствующую 4-мерную теорию, но также исследовать модели нарушения суперсимметрии и искать формулировки вне массовой оболочки, используя различные варианты размерной редукции.

1. *Обозначения*

Мы будем использовать метрику с сигнатурой $(+----)$. Как уже было сказано в п. A, мы реализуем алгебру Клиффорда $\{\gamma_r, \gamma_s\} = 2\eta_{rs}$ с помощью 4-мерных γ-матриц: γ_0, γ_i $(i = 1, 2, 3)$ – мнимые матрицы, а $\gamma_4 = i\gamma_5$ – действительная, причем $\gamma_{r_1\ldots r_5} = \varepsilon_{r_1\ldots r_5}$. В 5 измерениях нет майорановских спиноров. Вместо того чтобы использовать дираковские спиноры, мы можем удвоить число спиноров и наложить новые условия "действительности". Таким образом, в 5 измерениях имеется $2N$-суперсимметрия. Соответствующая классификация представлений основана на группе $USp(2N)$ (которая отвечает также массивным мультиплетам в 4 измерениях с центральным зарядом, пропорциональным пятой компоненте импульса). Обозначим через Ω^{ab} $(a = 1, \ldots, N)$ антисимметричную симплектическую матрицу группы $USp(2N)$. Используя ее для поднятия и опускания индексов, мы можем определить новые условия "действительности":

Бозоны: $A_\mu^{\ ab} = A^*_{\mu ab}$,

Фермионы $\psi_\mu^{\ a} = \gamma_5\psi^*_{\mu a}$.

Тогда алгебра суперсимметрии записывается в виде

$$\{Q^a_\alpha, Q^b_\beta\} = \Omega^{ab}\gamma^\mu_{\ \alpha\beta}P_\mu. \tag{4.3}$$

2. *Состав полей в теориях*

Представления $USp(2N)$, возникающие в 5-мерных теориях супергравитации, соответствуют бесследовым антисимметричным тензорам, например

---

[1]) Здесь имеются в виду двумерные теории супергравитации, полученные размерной редукцией из 4-мерной супергравитации с $N \leqslant 8$. В то же время существуют "собственно двумерные" супергравитационные теории, связанные со струнными моделями [63 – 66]. Теории супергравитации в трех измерениях исследовались в работе [67]. Отметим также, что в работах [68, 69] были построены теории супергравитации в $D = 10$, не указанные в табл. 5. – *Прим. перев.*

Таблица 6

	2	3/2	1	1/2	0	Группа
$N = 8$	1	8	27	48	42	$USp(8)$
$N = 6$	1	6	14 + 1	$14^* + 6$	14	$USp(6)$
	$(J = 1/2)\otimes$	[1	6	14	14^*]	
$N = 4$	1	4	5 + 1	4	1	$USp(4)$
	$(J = 1)$	$\otimes$	[1	4	5]	
$N = 2$	1	2	1			$USp(2)$
			$(J = 3/2)\otimes$	[1	2]	

A_μ^{ab}, χ^{abc} при условии, что

$$\Omega_{ab} A_\mu^{ab} = 0, \quad \Omega_{ab} \chi^{abc} = 0. \tag{4.4}$$

Представления, отвечающие полям (табл. 4), получаются (табл. 6) из представлений $2N$- суперсимметрии с низшими спинами путем умножения на представления группы $SO(3)$ с определенным угловым моментом [32] (группа $SO(3)$ классифицирует безмассовые состояния в 5 измерениях).

Путем простого подсчета размерностей мы можем определить тип предполагаемых глобальных и локальных инвариантностей действия. Это приводит к следующим результатам.

	Глобальная группа	Локальная группа
$N = 8$	$E_{6(+6)}$	$USp(8)$
$N = 6$	$SU^*(6)$	$USp(6)$
$N = 4$	$USp(4)\otimes R$	$USp(4)$
$N = 2$	$USp(2)$	$USp(2)$

3. Супергравитация с $N = 8$ в 5 измерениях

Теперь мы покажем, как, зная глобальную $E_{6(+6)}$ и локальную $USp(8)$ симметрии, можно построить лагранжиан супергравитации с $N = 8$ в 5-мерном пространстве [10,21].

Начнем с краткого описания группы $E_{6(+6)}$ заданием ее инфинитезимального действия на фундаментальном представлении с размерностью 27. Элементы соответствующего векторного пространства могут быть записаны в виде $Z^{\alpha\beta} = -Z^{\beta\alpha}$ $(= Z^*_{\beta\alpha})$, $\Omega_{\alpha\beta} Z^{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, 8)$ и преобразуются следующим образом:

$$\delta Z^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha{}_\gamma Z^{\gamma\beta} + \Lambda^\beta{}_\gamma Z^{\alpha\gamma} + \Sigma^{\alpha\beta\gamma\delta} Z_{\gamma\delta}. \tag{4.5}$$

Группа имеет 78 генераторов: 36 "компактных", отвечающих максимальной компактной подгруппе $Sp(8)$ (с антиэрмитовой матрицей параметров $\Lambda^{\alpha}{}_{\gamma}$, такой, что матрица $\Lambda_{\alpha\gamma}$ симметрична), и 42 "некомпактных" с параметрами $\Sigma^{\alpha\beta\gamma\delta}$, образующими антисимметричный и бесследовый тензор.

Группа E_6 не имеет билинейного инварианта, но имеет трилинейный инвариант

$$J = Z^{\alpha\beta}\Omega_{\beta\gamma}Z^{\gamma\delta}\Omega_{\delta\varepsilon}Z^{\varepsilon\lambda}\Omega_{\lambda\alpha} \,. \tag{4.6}$$

Сказанного достаточно, чтобы восстановить общую структуру теории. Теория имеет следующий состав полей: 1 гравитон $e_{\mu}{}^{r}$, 8 гравитино $\psi_{\mu}{}^{a}$, 27 векторных полей $A_{\mu}{}^{\alpha\beta}$ ($A_{\mu}{}^{\alpha\beta} = -A_{\mu}{}^{\beta\alpha} = (A_{\mu\alpha\beta})^{*}$, $\Omega_{\alpha\beta}A_{\mu}{}^{\alpha\beta} = 0$), 48 полей со спином $1/2$ χ^{abc} (образующих антисимметричный "псевдодействительный" бесследовый тензор) и 42 скалярных поля, описываемых (27×27)-матрицей $\mathcal{V}_{\alpha\beta}{}^{ab}$ группы E_6, определенной с точностью до локального $USp(8)$-преобразования.

Ввиду того что скаляры описываются элементом $\mathcal{V}_{\alpha\beta}{}^{ab}$ фактор-пространства $E_6/USp(8)$, их лагранжиан совпадает с лагранжианом соответствующей нелинейной сигма-модели

$$\mathfrak{L} = D_{\mu}\mathcal{V}_{\alpha\beta}{}^{ab}D^{\mu}(\mathcal{V}^{-1})_{ab}{}^{\alpha\beta} \sim -\mathrm{Tr}(\mathcal{V}^{-1}D_{\mu}\mathcal{V})^{2}, \tag{4.7}$$

где D_{μ} – ковариантная относительно группы $USp(8)$ производная, построенная из связности $Q_{\mu a}{}^{b}$. Последняя определяется соотношением

$$\mathcal{V}_{cd}{}^{\alpha\beta}\partial_{\mu}\mathcal{V}_{\alpha\beta}{}^{ab} = 2Q_{\mu[c}{}^{[a}\delta_{d]}{}^{b]} + P_{\mu}{}^{ab}{}_{cd}\,, \tag{4.8}$$

где в левой части стоит элемент алгебры Ли группы E_6, а правая часть есть сумма элементов алгебры Ли группы $USp(8)$. Таким образом, этот лагранжиан может быть приведен к виду

$$\mathfrak{L} \approx |P_{\mu abcd}|^{2} \,. \tag{4.9}$$

Величина P_{μ}, как и Q_{μ}, является инвариантной относительно группы E_6. Мы можем также описать скаляры с помощью метрики $G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}$ на указанном фактор-пространстве, которая ковариантна относительно E_6 и инвариантна относительно $USp(8)$:

$$G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta} = \mathcal{V}_{\alpha\beta}{}^{ab}\Omega_{ac}\,\Omega_{bd}\mathcal{V}_{\gamma\delta}{}^{cd} \,. \tag{4.10}$$

В результате получаем

$$\mathfrak{L} \sim \partial_{\mu}G_{\alpha\beta,\,\gamma\delta}\partial^{\mu}(G^{-1})^{\alpha\beta,\,\gamma\delta} \,. \tag{4.11}$$

Однако матрицы G недостаточно для описания взаимодействия с фермионами (ситуация аналогична случаю $g_{\mu\nu}$ и $e_\mu{}^r$).

Ввиду того, что для векторных полей не существует квадратичного инварианта, при построении соответствующего E_6-инвариантного кинетического члена следует воспользоваться метрикой $G_{\alpha\beta,\gamma\delta}$:

$$\mathfrak{L}_{V^2} \sim \sqrt{g}\, G_{\alpha\beta,\gamma\delta} F_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} F_{\rho\sigma}{}^{\gamma\delta} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}. \tag{4.12}$$

Как и в 11 измерениях, здесь имеется трилинейное калибровочно-инвариантное (с точностью до полной производной) взаимодействие. Благодаря существованию у группы E_6 трилинейного инварианта мы можем обойтись без использования как скалярной метрики G, так и тензорной метрики $g_{\mu\nu}$:

$$\mathfrak{L}_{V^3} \sim \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} \Omega_{\alpha\beta} F_{\mu\nu}{}^{\beta\gamma} \Omega_{\gamma\delta} F_{\rho\sigma}{}^{\delta\varepsilon} \Omega_{\varepsilon\eta} A_\lambda^{\eta\alpha}. \tag{4.13}$$

Так как фермионы не преобразуются относительно группы E_6, чтобы получить E_6-инвариантное взаимодействие бозонов и фермионов, нужно взять инвариантные комбинации бозонов: $P_{\mu abcd}$ и $Q_{\mu a}{}^b$ (входящие в ковариантные производные $D_\mu \psi_\nu{}^a$ и $D_\mu \chi_{abc}$) и $F_{\mu\nu}{}^{ab} = \mho_{\alpha\beta}{}^{ab} F_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta}$. Законы преобразования суперсимметрии $\delta\varphi$ предполагаются ковариантными относительно групп $USp(8)$ и E_6. На этой стадии $\mathfrak{L}$ и $\delta\varphi$ могут быть найдены с точностью до численных коэффициентов и членов 4-го порядка по фермионам. В частности, определяется вся неполиномиальная зависимость от скалярных полей. Требования суперсимметрии лагранжиана и замкнутость алгебры позволяют избавиться от оставшегося произвола. В результате мы получаем лагранжиан

$$\begin{aligned}
e^{-1}\mathfrak{L} = &-\frac{1}{4}R - \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu{}^a \gamma^{\mu\nu\rho} D_\nu \psi_{\rho a} - \frac{1}{8} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} G_{\alpha\beta,\gamma\sigma} F_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} F_{\rho\sigma}{}^{\gamma\delta} + \\
&+ \frac{i}{12}\bar{\chi}^{abc} \gamma^\mu D_\mu \chi_{abc} - \frac{1}{24} g^{\mu\nu} D_\mu \mho_{\alpha\beta}{}^{ab} D_\nu (\mho^{-1})^{\alpha\beta}{}_{ab} - \\
&- \frac{e^{-1}}{12} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda} (F_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta (F_{\rho\sigma})^\beta{}_\gamma (A_\lambda)^\gamma{}_\alpha + \frac{i}{3\sqrt{2}} P_\rho{}^{abcd} \psi_{\mu a} \gamma^\rho \gamma^\mu \chi_{bcd} + \\
&+ \frac{i}{4} \mho_{\alpha\beta}{}^{ab} F_{\mu\nu}{}^{\alpha\beta} [\bar{\psi}^\rho{}_a \gamma_\rho \gamma^{\mu\nu} \gamma_\sigma \psi^\sigma{}_b + \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\psi}_\rho{}^c \gamma^{\mu\nu} \gamma^\rho \chi_{abc} + \\
&+ \frac{1}{2} \bar{\chi}_{acd} \gamma^{\mu\nu} \chi_b{}^{cd}] + \text{(Члены 4-го порядка по полям)}.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Члены 4-го порядка приведены в работе [10], и мы их не будем выписывать. Лагранжиан инвариантен относительно глобальной группы $E_{6(+6)}$, локальной группы $USp(8)$ и следующих преобразований суперсимметрии (для простоты

мы опускаем члены, трилинейные по фермионам):

$$\delta e_\mu{}^r = -i\bar{\varepsilon}^a \gamma^r \psi_{\mu a}\,, \tag{4.15}$$

$$(\mathcal{V}^{-1})^{\alpha\beta}{}_{cd}\,\delta\mathcal{V}_{\alpha\beta,\,ab} = -2\sqrt{2}\,i\,(\bar{\varepsilon}_{[a}\chi_{bcd]} + \frac{3}{4}\Omega_{[ab}\bar{\varepsilon}_e\chi^e_{cd]}), \tag{4.16}$$

$$\delta A_\mu{}^{\alpha\beta} = 2i\mathcal{V}^{\alpha\beta}{}_{ab}(\bar{\varepsilon}^a\psi_\mu{}^b + \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}_c\gamma_\mu\chi^{abc}), \tag{4.17}$$

$$\delta\psi_{\mu a} = (D_\mu(\hat{\omega})\delta_a{}^b + Q_{\mu a}{}^b)\varepsilon_b - \frac{1}{6}\hat{F}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}\mathcal{V}_{\alpha\beta ab}\times$$

$$\times(\gamma^{\rho\sigma}\gamma_\mu + 2\gamma^\rho\delta_\mu{}^\sigma)\varepsilon^b + \ldots, \tag{4.18}$$

$$\delta\chi_{abc} = \sqrt{2}\hat{P}_{\mu abcd}\gamma^\mu\varepsilon^d - \frac{3}{2\sqrt{2}}\gamma^{\rho\sigma}\hat{F}^{\alpha\beta}{}_{\rho\sigma}(\mathcal{V}_{\alpha\beta[ab}\varepsilon_{c]} +$$

$$+ \frac{1}{3}\Omega_{[ab}\mathcal{V}_{\alpha\beta c]d}\varepsilon^d) + \ldots\,. \tag{4.19}$$

4. Супергравитация с $N = 2$ в 5 измерениях

Рассматривая согласованное "усечение" теории с $N = 8$, мы получим все пятимерные теории супергравитации с $N < 8$ (в том числе и соответствующие симметрии). Например, лагранжиан супергравитации с $N = 2$ таков:

$$e^{-1}\mathcal{L} = -\frac{1}{4}R(\omega) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_\mu{}^a\gamma^{\mu\nu\rho}D_\nu\left(\frac{\omega+\hat{\omega}}{2}\right)\psi_{\rho a} -$$

$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + \frac{e^{-1}}{6\sqrt{3}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma\lambda}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}A_\lambda -$$

$$-\frac{i\sqrt{3}}{16}(F_{\mu\nu} + \hat{F}_{\mu\nu})\bar{\psi}^{\rho c}\gamma_{[\rho}\gamma^{\mu\nu}\gamma_{\sigma]}\psi^\sigma_c\,, \tag{4.20}$$

где

$$\hat{\omega}_{\mu rs} = \omega_{\mu rs} + \frac{i}{4}\bar{\psi}^{\rho a}\gamma_{\mu rs\,\rho\sigma}\psi_a{}^\sigma, \tag{4.21}$$

$$\hat{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + \frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\psi}_\mu{}^c\psi_{\nu c}\,,$$

а $\omega_{\mu rs}$ определяется из своих уравнений движения. Действие инвариантно относительно следующих преобразований суперсимметрии:

$$\delta e_\mu{}^r = -i\bar{\varepsilon}^c\gamma^r\psi_{\mu c}\,, \tag{4.22}$$

$$\delta\psi_{\mu a} = [D_\mu(\hat{\omega}) + \frac{1}{4\sqrt{3}}\hat{F}_{\rho\sigma}(\gamma^{\rho\sigma}\gamma_\mu + 2\gamma^\rho\delta_\mu^\sigma)]\varepsilon_a , \tag{4.23}$$

$$\delta A_\mu = -\frac{\sqrt{3}}{4}\bar{\varepsilon}^c\psi_{\mu c} . \tag{4.24}$$

Структура такой теории полностью аналогична структуре 11-мерной супергравитации, из которой мы можем путем размерной редукции и согласованного "усечения" получить все теории супергравитации в меньшем числе измерений.

§5. Возможные следствия симметрий: гипотезы о супергравитации с $N = 8$ в 4 измерениях

В данном параграфе мы кратко изложим все, что нам известно, и перечислим то, что нам хотелось бы узнать о супергравитации с $N = 8$ как на классическом, так и на квантовом уровне. Ряд вопросов, отмечаемых ниже, подробно излагается в других статьях настоящего сборника. Мы предложим две гипотезы, касающиеся супергравитации с $N = 8$, а также рассмотрим их следствия, относящиеся к вопросу о возможной связи между супергравитацией с $N = 8$ и физикой элементарных частиц.

А. Проблемы в супергравитации с $N = 8$

1. Геометрическая интерпретация фермионов

Мы видели, что благодаря существованию глобальной E_7 и локальной $SU(8)$ симметрий оказывается возможным "геометрическое" описание скалярных полей, при котором им сопоставляются элементы фактор-пространства $E_7 / SU(8)$. Возникает вопрос: возможна ли "геометрическая" интерпретация полей со спином 1/2? Хотя такая интерпретация еще никем не предложена, представляется естественным положительный ответ на данный вопрос. Такая интерпретация позволила бы добиться существенного упрощения части лагранжиана, включающей члены 4-го порядка по фермионам, а также прояснить вопрос о структуре суперсимметрии теории и, возможно, вопрос о вспомогательных полях.

2. Формулировка вне массовой оболочки

Существует суперпространственный вариант супергравитации с $N = 8$, согласованный с симметриями E_7 и $SU(8)$. Но эта теория сформулирована на массовой оболочке, так как из тождеств Бьянки (и связей) для кривизны и кручения следуют динамические уравнения движения. Такая же ситуация имеет место для супергравитации с $N = 1$ в 11 измерениях, где все геометрические величины могут быть выражены через одно скалярное суперполе $F_{rstu}(x, \theta)$, удовлетворяющее некоему условию (из которого следуют уравнения поля) [3, 11].

Была сделана попытка найти вспомогательные поля для супергравитации с $N = 8$ на линеаризованном уровне, используя размерную редукцию на

основе преобразования Лежандра при выборе в качестве исходной теории линеаризованной супергравитации с $N = 8$ в 5 измерениях [22]. Такой подход приводит к дифференциальным уравнениям связей для калибровочных полей, которые не могут быть решены в явном виде (по крайней мере так, чтобы в окончательном лагранжиане не было духов или членов с высшими производными). Эти связи могут быть наложены с помощью множителей Лагранжа, но при этом теряется замкнутость алгебры (в частности, алгебра суперсимметрии не замкнута при действии на множители Лагранжа). Кроме того, такая теория (даже если бы ее удалось обобщить на нелинейный случай) не согласована с симметриями E_7 и $SU(8)$ (ее симметриями, вероятно, являются E_6 и $USp(8)$).

3. Нарушение суперсимметрии

Исходя из супергравитации с $N = 8$ в 5 измерениях, методом обобщенной размерной редукции Шерка и Шварца [47] можно получить вариант супергравитации с $N = 8$ в 4 измерениях, в котором имеются 4 массовых параметра [21]. Эта новая теория по-прежнему инвариантна относительно некоторых преобразований суперсимметрии локального типа. Однако инвариантность относительно новых преобразований является "спонтанно нарушенной", и их алгебра не содержит глобальную алгебру суперсимметрии. Тем не менее такая теория конечна в однопетлевом приближении [49].

4. Локализация группы $O(8)$

На возможность локализации группы симметрий $O(N)$ расширенных теорий супергравитации в 4 измерениях указывает то обстоятельство, что векторные поля мультиплетов супергравитации в общем случае принадлежат присоединенному представлению группы $O(N)$ (это справедливо при $N = 1, \ldots 5$ и 8; при $N = 6$ дополнительно имеется вектор – синглет группы $O(8)$; теория с $N = 7$ тождественна теории с $N = 8$). Такая локализация была полностью проведена при $N = 1, \ldots, 5$ и частично – при $N = 8$ [27] [1]. Она позволяет ввести в теорию новую константу связи – безразмерную калибровочную константу. Одновременно локализация приводит к появлению огромной космологической константы и неограниченного снизу потенциала скаляров. В основе теорий супергравитации с калибровочной группой $O(N)$ лежит уже не супералгебра Пуанкаре, а супералгебра де Ситтера, причем калибровочная константа связи связана с радиусом пространства (анти) де Ситтера. Введение калибровочного взаимодействия нарушает установленную выше глобальную группу симметрии теории, но сохраняет локальную группу $SU(N)$.

Построение калибровочных $O(N)$-теорий супергравитации явилось первым примером суперобъединения, при котором векторные калибровочные поля

---

[1] Полное построение калибровочной супергравитации с $N = 8$ (из которой "усечением" получают калибровочные теории с $N < 8$) было проведено в работе [70]. – *Прим. перев.*

и гравитон (и гравитино) оказались в одном мультиплете. Однако калибровочные теории супергравитации не позволяют описать феноменологические данные при низких энергиях. В самом деле, прежде всего необходимо исключить из теории частицы со спином > 2 или частицы со спином 2, не совпадающие с гравитоном, так как для таких частиц не удается построить непротиворечивой теории со взаимодействием. Это требование приводит к ограничению числа супергенераторов: $N \leqslant 8$. Далее, рассматривая супегравитацию с $N = 8$ с калибровочной группой $SO(8)$ и предполагая, что существует решение проблем, связанных с неограниченностью снизу потенциала скаляров[1], мы тем не менее заключаем, что группа $SU(3)_c \otimes SU(2) \otimes U(1)$ не есть подгруппа группы $SO(8)$. Несмотря на эту трудность, Гелл-Манн [35] попытался пойти дальше и рассмотреть подгруппу $SU(3)_c \otimes U(1)$ группы $SO(8)$. В результате получается вектороподобная теория с разбиением $8 \to 3 + \bar{3} + 1 + \bar{1}$ и относительными зарядами $(-1/3,\ 1/3,\ 1,\ 0)$. Дальнейший анализ показывает, что в теории недостает мюона и тау-лептона и их нейтрино, а также $W^{\pm}$-бозонов.

Б. Квантовые поправки

Данный вопрос подробно рассматривается в лекциях ван Ньювенхёйзена, Даффа и Каллош на этой школе. Подобно эйнштейновской теории гравитации, супергравитация не может быть перенормируемой в обычном смысле, так как гравитационная константа связи κ имеет размерность. Это означает, что контрчлены не совпадают по структуре с исходным лагранжианом, так что расходимости не могут быть устранены переопределением исходных констант связи. Таким образом, супергравитация может быть или конечной, или противоречивой в рамках теории возмущений).

1. Однопетлевой контрчлен на массовой оболочке

Рассмотрим теорию гравитации без полей материи с космологической константой Λ:

$$S = -\frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\sqrt{g}\,(R - 2\Lambda). \tag{5.1}$$

Соответствующий однопетлевой контрчлен в этой теории после учета уравнений движения (или после переопределения фонового поля) может быть записан в виде

$$\Delta S = -\frac{1}{D-4}\,(A\chi + B\delta), \tag{5.2}$$

[1] Реальной проблемой калибровочной супергравитации является не знаконеопределенность потенциала скаляров (сама по себе не означающая неустойчивости вакуума [71]), а планковское значение космологической постоянной в суперсимметричном основном состоянии. Возможные пути решения этой проблемы с учетом квантовых поправок были рассмотрены в работе [72]. — *Прим. перев.*

где

$$\delta = -\frac{k^2\Lambda}{12\pi^2} S, \qquad (5.3)$$

$$\chi = \frac{1}{32\pi^2}\int d^4x\sqrt{g}\,(R^2_{\mu\nu\lambda\rho} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2) = \text{Целое число} \qquad (5.4)$$

(подынтегральное выражение в формуле (5.4) есть полная дивергенция). Константы A и B имеют следующие значения: $A = {}^{106}/_{45}$, $B = -{}^{87}/_{10}$. В результате теория (5.1) является конечной в однопетлевом приближении, если $\Lambda = 0$ (космологическая константа равна нулю) и $\chi = 0$ (топологическая структура пространства-времени тривиальна). В случае супегравитации вместо S, δ и χ следует подставить соответствующие суперинварианты. При этом оказывается, что 1) если $N \geqslant 5$, то $B = 0$ (из этого вытекает равенство нулю β-функции для $O(N)$-калибровочной константы связи; равенство $\beta = 0$ было также подтверждено прямым вычислением); 2) коэффициент A является целым при $N \geqslant 3$; 3) если использовать при $N = 8$ спектр полей, следующий из размерной редукции (63 скаляра, $7A_{\mu\nu}$, $1A_{\mu\nu\rho}$), то выполняется равенство $A = 0$; то же свойство справедливо и для супергравитации с $N = 4$, если заменить один из двух скаляров антисимметричным тензором; легко также найти состав полей, обеспечивающий равенство $A = 0$ при $N = 5$ и 6, но соответствующие теории еще не были построены явно; 4) при $N = 8$ отсутствуют граничные добавки к однопетлевым контрчленам. Таким образом, на сегодняшний день супергравитация с $N = 8$ является единственной теорией, учитывающей гравитацию и одновременно полностью конечной в однопетлевом приближении.

2. *n-петлевые контрчлены*

Не существует суперсимметричного расширения двухпетлевого контрчлена эйнштейновской теории гравитации. На линеаризованном уровне существуют трехпетлевые суперсимметричные контрчлены (которые, возможно, не являются E_7-симметричными в случае супергравитации с $N = 8$). Наконец, существует восьмипетлевой контрчлен, инвариантный относительно всех симметрий супергравитации с $N = 8$.

3. *Гипотеза 1. Супергравитация с $N = 8$ существует! (она конечна)*

Хотя существуют допустимые контрчлены, нас обнадеживает пример сокращения вкладов в коэффициент при допустимом контрчлене в суперсимметричной теории Янга – Миллса с $N = 4$. Подобное сокращение может быть связано со свойством CPT-самосопряженности мультиплетов супергравитации с $N = 8$ и супер-янг-миллсовской теории с $N = 4$. Впрочем, высказывалось также предположение, что все суперсимметричные теории с $N \geqslant 3$ должны быть конечными. Подобное предположение означает, что мы не можем произвольно

менять параметры путем перенормировки. В таком случае к – фактически не параметр, а лишь массовый масштаб. Вследствие этого (некалибровочная) супергравитация с $N = 8$ вообще не имеет параметров[1]).

В. Следствия локальной симметрии $SU(8)$

Примеры двумерных (перенормируемых) теорий (CP^N или $SU(P+N)/U(P)\times SU(N)$ [23, 53]), обладающих локальной симметрией, которой соответствуют составные калибровочные поля, приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза II

Локальная $SU(8)$-симметрия становится динамической на квантовом уровне. А именно, калибровочные поля, отвечающие группе $SU(8)$, становятся распространяющимися (приобретают кинетический член и взаимодействуют как поля Янга – Миллса с вычисляемой (в соответствии с гипотезой I) константой связи g).

Так как группа $SU(8)$ является достаточно широкой для построения теорий великого объединения (она, например, допускает группу $SU(5)$ в качестве подгруппы), тем самым снимается проблема описания физики низких энергий в рамках калибровочной $SO(8)$-супергравитации и мы приходим к полностью отличной от прежней точки зрения на суперобъединение.

Супергравитация – фундаментальная теория. Ее следует рассматривать как теорию преонов, спектр связанных состояний которых мы должны определить.

Исходя из суперсимметрии, естественно предположить, что динамическими становятся не только $SU(8)$-калибровочные поля, но и другие поля, которые вместе могут образовывать супермультиплет. Ряд гипотез по поводу вида этого мультиплета был выдвинут в работах [29, 30]. А именно, был предложен следующий состав мультиплета:

$$(3/2)^A,\ (1)^A{}_B,\ (1/2)^A{}_{[BC]},\ \ldots,\ (-5/2)^A\ + CPT\text{-сопряженный набор.}$$

Сделав ряд весьма существенных предположений (которые на сегодняшний день не могут считаться доказанными), авторы указанных работ рассмотрели модель нарушения суперсимметрии и группы $SU(8)$ до $SU(5)$ на планковском масштабе. Рассматривая лишь безмассовые состояния, отвечающие единой $SU(5)$-теории, они получили в качестве максимально возможного набора частиц три поколения фермионов в представлениях $(\overline{5}+10)_L$. Все частицы первоначально принадлежат единому мультиплету. Была предложена также возможность восстановления E_7-симметрии на уровне связанных состояний. Ввиду некомпактности группы E_7 соответствующие унитарные представления имеют бесконечную размерность.

---

[1]) Роль параметров в квантовой теории будут играть вакуумные значения скалярных полей (ввиду отсутствия древесного потенциала скаляров в некалибровочной супергравитации классические значения этих параметров являются произвольными). – *Прим. перев.*

На основе более слабых предположений о секторе полей со спином $1/2$ в работе [24] было показано, что существуют комбинации супермультиплетов, которые приводят к отсутствию аномалий в этом секторе. А именно, фермионы со спином $1/2$ принадлежат либо действительным представлениям группы $SU(8)$ или $SU(5)$, либо представлениям $(8 + \overline{28} + 56)_L$ группы $SU(8)$ и $(\overline{5} + 10)_L$ группы $SU(5)$. Единая теория, основанная на симметрии $SU(8)$, не согласуется с требованием, чтобы мультиплеты теории были образованы связанными состояниями супергравитации с $N = 8$. В случае $SU(5)$-теории число "поколений" оказывается четным, а число мультиплетов – довольно большим (~ 15).

Несмотря на то, что эти варианты пока недостаточно обоснованы, сам факт их существования показывает, что при условии справедливости двух сделанных выше гипотез физический спектр супергравитации с $N = 8$ достаточно богат для того, чтобы иметь возможность описать феноменологическую картину при низких энергиях ($E \leqslant 10^{15}$ ГэВ). Для дальнейшего продвижения необходимо более глубокое понимание структуры супегравитации с $N = 8$, в особенности структуры мультиплета, содержащего $SU(8)$-калибровочные поля, и поведения различных членов этого мультиплета под действием глобальной группы E_7 и локальной группы $SU(8)$. Предстоит также решить (хотя бы частично) проблему вспомогательных полей, что позволит "линеаризовать" фермионные члены в лагранжиане. Такая "линеаризация" является необходимым этапом на пути изучения динамики теории, в частности, появления кинетического члена и янг-миллсовского взаимодействия $SU(8)$-калибровочных полей. Перед нами теперь стоит новый вопрос: что такое конечная теория? В частности, очень хотелось выяснить, существует ли для такой теории некий аналог асимптотической свободы перенормируемых теорий.

Литература[1)]

1. *Aurelia A., Nicolai H., Townsend P.K.* Spontaneous breaking of supersymmetry and the cosmological constant. In: Superspace and Supergravity, ed. S.W. Hawking, M. Roček, p. 403, Cambridge: Cambridge University Press (1981).
2. *Brink L., Howe P.* The N = 8 Supergravity in Superspace, Phys. Lett., **88B**, 268 (1979).
3. *Brink L., Howe P.* Eleven dimensional supergravity on the mass shell in superspace, Phys. Lett., **91B**, 384 (1980).
4. *Brink L., Scherk J., Schwarz J.H.* Supersymmetric Yang-Mills theories, Nucl. Phys., **B 121**, 77 (1977).
5. *Callan C., Coleman S., Wess J., Zumino B.* The structrure of phenomenological Lagrangians II, Phys. Rev., **177**, 2247 (1969).

1) Дополнительные ссылки могут быть найдены в обзорах [31, 51, 44].

6. *Cho Y.M., Freund P.G. O.* Non-Abelian gauge fields as Nambu-Goldstone fields, Phys., Rev., **D12**, 1711(1975).
7. *Cho Y.M., Jang P.S.* Unified geometry of internal space with space-time, Phys. Rev., **D12**, 3789 (1975).
8. *Coleman S., Wess J., Zumino B.* The structure of phenomenological Lagrangians I, Phys. Rev., **177**, 2239 (1969).
9. *Cremmer E.* The N = 8 supergravity In: Unification of the fundamental particle interactions, eds. S. Ferrara, J. Ellis, P. van Nieuwenhuizen, New York: Plenum Publishing Corporation (1980), p. 137.
10. *Cremmer E.* Supergravities in 5 dimensions. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking, M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981), p. 267.
11. *Cremmer E., Ferrara S.* Formulation of 11-dimensional supergravity in superspace, Phys. Lett., **91B** 61 (1980).
12. *Cremmer E., Julia B.* The N = 8 supergravity theory. I. The Lagrangian, Phys. Lett., **80B**, 48 (1978).
13. *Cremmer E., Julia B.* The SO(8) supergravity. Nucl. Phys., **B 159**, 141 (1979).
14. *Cremmer E., Scherk J.* Dual models in four dimensions with internal symmetries. Nucl. Phys., **B 103**, 399 (1976).
15. *Cremmer E., Scherk J.* Spontaneous compactification of extra space dimensions. Nucl. Phys., **B 118**, 61 (1977).
16. *Cremmer E., Scherk J.* Algebraic simplifications in supergravity theories. Nucl. Phys., **B 127**, 259 (1977).
17. *Cremmer E., Ferrara S., Scherk J.* U(N) invariance in extended supergravity. Phys. Lett., **68B**, 234 (1977).
18. *Cremmer E., Horvath Z., Palla L., Scherk J.* Grand unified schemes and spontaneous compactification. Nucl. Phys., **B 127**, 57 (1977).
19. *Cremmer E., Ferrara S., Scherk J.* SU(4) invariant supergravity theory. Phys. Lett., **74B**, 61 (1978).
20. *Cremmer E., Julia B., Scherk J.* Supergravity theory in 11 dimensions. Phys. Lett., **76B**, 409 (1978).
21. *Cremmer E., Scherk J., Schwarz J.H.* Spontaneously broken N = 8 supergravity. Phys. Lett., **84B**, 83 (1979).
22. *Cremmer E., Ferrara S., Stelle K., West P.C.* Off shell N = 8 supersymmetry with central charges. Phys. Lett., **94B**, 349 (1980).
23. *D'Adda D., Di Vecchia P., Lüscher M.* A 1/N expandable series of non-linear σ-models with instantons. Nucl. Phys., **B 146**, 63 (1978).
24. *Derendinger J.P., Ferrara S., Savoy C.A.* Flavor and superunification. Nucl. Phys., **B 188**, 77 (1981).
25. *De Wit B.* Properties of SO(8) supergravity. Nucl. Phys., **B 158**, 189 (1979).
26. *De Wit B., Freedman D.Z.* On SO(8) extended supergravity. Nucl. Phys., **B 130**, 105 (1977).
27. *De Wit B., Nicolai H.* Extended supergravity with local SO(5) invariance. Nucl. Phys., **B 188**, 98 (1981).

28. *Duff M.* Antisymmetric tensors and supergravity. In: Superspace and Supergravity, eds. S.W. Hawking, M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981), p. 381.
29. *Ellis J., Gaillard M.K., Zumino B.* A grand unified theory obtained from broken supergravity. Phys. Lett., **94 B**, 343 (1980).
30. *Ellis J., Gaillard M.K., Maiani L., Zumino B.* In: Unification of the Fundamental Particle Interactions, eds. S. Ferrara, J. Ellis. P. van Nieuwenhuizen (1980), p. 69.
31. *Fayet P., Ferrara S.* Supersymmetry. Phys. Reports, **32 C, 31 C**, 250 (1977).
32. *Ferrara S., Zumino B.* The mass matrix of N = 8 supergravity. Phys. Lett., **86B**, 279 (1979).
33. *Ferrara S., Scherk J., Zumino B.* Algebraic properties of extended supergravity theories. Nucl. Phys., **B 121**, 393 (1977).
34. *Gaillard M.K., Zumino B.* Duality rotations for interacting fields. Nucl. Phys., **B 193**, 221 (1981).
35. *Gell-Mann M.* Talk at the Washington Meeting of the A.P.S. (1977).
36. *Gliozzi F., Olive D., Scherk J.* Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model. Nucl. Phys., **B 122**, 253 (1977).
37. *Грисару М.*, см. лекции в настоящем сборнике (с. 63).
38. *Julia B.* Group desintegrations. In: Superspace and Supergravity eds. S.W. Hawking, M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981), p. 331.
39. *Julia B.* Infinite Lie algebras in physics, Preprint LPTENS 81/14. Invited talk at the Johns Hopkins Workshop on Particle Theory (1981).
40. *Luciani J.F.* Space-time geometry and symmetry breaking. Nucl. Phys., **B135**, 111 (1978).
41. *Morel B., Thierry-Mieg J.* Superalgebros in exceptional gravity. In: Superspace and supergravity, eds. S.W. Hawking M. Roček, Cambridge: Cambridge University Press (1981), p. 351.
42. *Nicolai H., Townsend P.K., van Nieuwenhuizen P.* Comments on 11-dimensional supergravity. Nuovo Cimento Lett., **30**, 315 (1981).
43. *Palla L.* Spontaneous compactification. In: Proceedings of the 19th International Conference in High Energy Physics, eds. S. Homma, M. Kawaguchi, H. Miyazawa, Tokyo, Physical Society of Japan (1979), p. 629.
44. *Scherk J.* Extended supersymmetry and extended supergravity. In: Recent Developments in Gravitation, eds. M. Levy, S. Deser, N.Y., Plenum (1979), p. 479. [Имеется перевод: В сб.: Геометрические идеи в физике/Под ред. Ю.И Манина. – М.: Мир, 1983, с. 201].
45. *Scherk J., Schwarz J.H.* Dual field theory of quarks and gluons. Phys. Lett., **57 B**, 463 (1975).
46. *Scherk J., Schwarz J.H.* Spontaneous breaking of supersymmetry through dimensional reduction. Phys. Lett., **82B**, 60 (1979).
47. *Scherk J., Schwarz J.H.* How to get masses from extra-dimensions. Nucl. Phys., **B153**, 61(1979).

48. *Schwarz J.H.*, N = 8 supergravity in various dimensions and the implications for four dimensions. Phys. Lett., **95B**, 333 (1979).

49. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* Renormalizability properties of spontaneously broken N = 8 supergravity. Nucl. Phys., **B195**, 330 (1982).

50. *Sohnius M., Stelle K., West P.C.* Dimensional reduction by Legendre transformation generates off-shell supersymmetric Yang – Mills theories. Nucl Phys., **B173**, 127 (1981).

51. *van Nieuwenhuizen P.* Two lectures on Supergravity and Phenomenology at the Bad-Honnef Summer Institute, Preprint IT-SB-80-84 (1980).

52. *West P.C.* Representations of supersymmetry. In: Supergravity '81, Proc. 1st School on Supergravity, eds. S. Ferrara, J.G. Taylor, Cambridge Univ. Press (1982), p. 111.

53. *Witten E.* Instantons, the quark model and the 1/N expansion. Nucl. Phys., **B149**, 285 (1979).

54. *Zumino B.* Supergravity and grand unification. In: Superspace and supergravity, eds. S. Hawking, M. Roček, Cambridge : Cambridge University Press (1981), p. 423.

55*. *Candelas P., Weinberg S.* Calculation of gauge couplings and compact circumferences from self consistent dimensional reduction. Nucl. Phys., **B231**, 117 (1984).

56*. *Воронов Н.А., Коган Я.И.* Спонтанная компактификация в моделях Калуцы – Клейна и эффект Казимира. Письма в ЖЭТФ, 1983, т. 38, с. 262.

57*. *D'Auria R., Fre P.* Geometric supergravity in = 11 and its hidden supergroup. Nucl. Phys., **B201**, 101 (1982).

58*. *Castellani L., Fre P., Giani F., Pilch K., van Nieuwenhuizen P.*, Gauging of d = 11 supergravity? Ann. of Phys., **146**, 35 (1983).

59*. *Sezgin E., van Nieuwenhuizen P.* Renormalizability properties of antisymmetric tensor fields coupled to gravity. Phys. Rev., **D22**, 301 (1980).

60*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* Quantum equivalence of dual field theories, P.N. Lebedev Physical Institute preprint No. 67 (1984). Ann. Phys. (USA)(1985).

61*. *Chapline G., Slansky R.* Dimensional reduction and flavor chirality. Nucl. Phys., **B 209**, 461 (1982).

62*. *Olive D., West P.* The N = 4 supersymmetrical E_8 gauge theory and coset space dimensional reduction. Nucl. Phys., **B217**, 248 (1983).

63*. *Brink L., Di Vecchia P., Howe P.* A locally supersymmetric and reparametrization invariant action for the spinning string. Phys. Lett., **65B**, 471 (1976).

64*. *Deser S., Zumino B.* A complete action for the spinning string. Phys. Lett., **65B**, 369 (1976).

65*. *Brink L., Schwarz J.H.* Local complex supersymmetry in two dimensions. Nucl. Phys., **B121**, 285 (1977).

66*. *Howe P.S.* Super Weyl transformations in two dimensinns. J. Phys., **A 12**, 393 (1979).

67*. *Marcus N., Schwarz J.H.* Three dimensional supergravity theories. Nucl. Phys., **B228**, 154 (1983).

68*. *Chamseddine A.H.* N = 4 supergravity coupled to N = 4 matter and hidden symmetries. Nucl. Phys., **B 185**, 403 (1981).

69*. *Schwarz J.H., West P.C.* Symmetries and transformations of chiral N = 2, d = 10 supergravity. Phys. Lett., **126 B**, 301 (1983).

70*. *De Wit B., Nicolai H.* N = 8 supergravity. Nucl. Phys., **B 208**, 323 (1982).

71*. *Breitenlohner P., Freedman D.Z.* Stability in gauged extended supergravity. Ann. Phys. (USA), **144**, 249 (1982).

72*. *Fradkin E.S., Tseytlin A.A.* One-loop effective potential in gauged O(4) supergravity and the problem of Λ- term. Nucl. Phys., **B 234**, 472 (1984).

Содержание

С. Феррара, Дж. Тейлор
Введение в супергравитацию

Научный редактор Е. С. Куранский
Мл. научный редактор Г. Г. Сорокина
Художник Ю. Ф. Альберт
Художественный редактор В.Б. Прищепа
Технический редактор Т. А. Алюлина
Корректор Т. Е. Луганова, М. С. Голубева
ИБ № 4093

Подписано к печати 1.07.85. Формат 60x90 1/16 Бумага офсетная № 2. Печать офсетная. Объем 9,50 бум. л. Усл. печ. л. 19,00 Усл. кр. –отт 19,37 Уч. –изд. л. 19,95 Изд. № 2/3371 Тираж 5000 экз. Зак 2475 Цена 3 р. 00 к.

Набрано в издательстве "МИР" на участке оперативной полиграфии
129820, ГСП, Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Московской типографии № 9 Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Волочаевская, 40.

Уважаемый читатель

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во "Мир".

Издательство "Мир"
выпустит в 1986 году книгу:

де Бройль Л. **Соотношения неопределенностей Гейзенберга и вероятностная интерпретация волновой механики.** Пер. с франц., 22 л., 3 р. 60 к.

Книга одного из основателей квантовой механики является попыткой ответить на дилемму: следует ли при создании последующих физических теорий более глубокого уровня исходить из первичности вероятностных или детерминистских понятий. Размышления над этими вопросами привели к тому, что монографию, возникшую на базе спецкурсов 1950 – 1952 гг., Л. де Бройль стал писать не для широкой публики, а для себя, включив в нее свои незавершенные идеи, надежды и сомнения. Настоящаа книга является обработкой указанных материалов, проведенной ближайшим сотрудником автора Ж. Лошаком и дополненной замечаниями, учитывающими более поздние результаты. Основному тексту книги предшествует предисловие Лошака, дающее историческую оценку рассматриваемых в книге вопросов. Материал изложен в двух частях. В первую часть "О соотношении неопределенностей Гейзенберга" вошли разделы: "Основы волновой механики", "Вероятностная интерпретация волновой механики", "Волновая механика систем частиц", "Общий формализм волновой механики", "Общие принципы, связанные с вероятностной интерпретацией волновой механики", "Вопросы, связанные с коммутированием операторов в волновой механике", "Физическая невозможность одновременного измерения канонически сопряженных величин", "Точная форма соотношений неопределенностей", "Четвертое соотношение неопределенностей Гейзенберга", "Анализ отдельных трудных вопросов волновой механики". Вторая часть "О вероятностной интерпретации волновой механики и различных связанных с ней вопросов" состоит из разделов: "Об основных понятиях теории вероятностей", "Об общих понятиях волновой механики", "Введение характеристических функций в вероятностный формализм волновой механики", "Теория смешанных состояний и теория измерений фон Неймана", "Теория измерений в волновой механике", "Роль времени в волновой механике". Монография заканчивается полной библиографией работ Луи де Бройля.

Для физиков, а также философов, интересующихся вопросами квантовой механики.

Уважаемый читатель!

Заказы на книги издательства "Мир" принимаются в магазинах научно-технической литературы.

Помните!

Тираж книг определяется числом собранных заказов. Только своевременно оформленный заказ гарантирует Вам приобретение интересующих Вас книг.

3р.

ВВЕДЕНИЕ В СУПЕРГРАВИТАЦИЮ